Diferencijalna Geometrija: Vježbe 1

(*Krive: reprezentacija, dužina luka i oskulatorna ravan*)

Zadatak 1.1. Pokažite da su konični presjeci $x^2 + y^2 = z^2$, $x\cos\alpha + z\sin\alpha = d$, gdje $\alpha \in \mathbb{R}$ i $d \neq 0$ krive (potvrdite da su gradijenti odgovarajuće odabranih funkcija linearno nezavisni u svim tačkama krive) i nadjite njihove parametrizacije.

Zadatak 1.2. Pokazati da je dužina luka invarijantna pod reparametrizacijom parametrizovane krive.

Zadatak 1.3. Posmatrajmo krivu datu implicitno sa $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$ i $a\sqrt{b^2 - c^2}\, z = c\sqrt{a^2 - b^2}\, x$, gdje $a > b > c$. Izračunajte njenu dužinu luka i nadjite reparametrizaciju dužinom luka.

Zadatak 1.4. Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 2

(*Krive: krivina i torzija*)

Zadatak 2.1. Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive.

Zadatak 2.2. Uvjerite se da se oskulatorna kružnica dužinom luka parametrizovane krive γ u tački $\gamma(s_0)$ (koristite $s_0 = 0$ kako bi vam bilo lakše) doista može parametrizovati (dužinom luka) tako da se Taylorovi polinomi drugog reda zaista poklapaju.

Zadatak 2.3. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ parametrizovana kriva tako da $T'(t) \neq 0$, $\forall t$. Pokazati da možemo izabrati $N = \frac{T'}{|T'|}$ i da, sa ovim izborom N,

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \quad \text{i} \quad \tau = \frac{|\gamma', \gamma'', \gamma'''|}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

Zadatak 2.4. Naći krivinu i torziju krive

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}).$$

Dajte geometrijski argument zašto τ nestaje.

Zadatak 2.5. Neka je $s \mapsto \tau(s)$ proizvoljna funkcija. Naći dužinom luka parametrizovanu krivu $s \mapsto \gamma(s)$ sa krivinom $\kappa \equiv 0$ torzijom τ (provjerite krivinu i torziju!).

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 3

(*Krive: Frenetove jednačine*)

Zadatak 3.1. Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su κ i τ krivina i torzija krive γ. Definišimo "Darboux-ovo vektorsko polje"

$$\delta := N \times N' = \tau\, T + \kappa\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

Zadatak 3.2. Pokazati da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ uzima vrijenosti u sferi ako i samo ako njene normalne ravni prolaze kroz (fiksnu) tačku $c \in \mathbb{R}^3$ (centar sfere). Pomoć: kada budete provjeravali konstantnu udaljenost $|\gamma - c|^2$ *nemojte* izražavati koeficijente c pomoću krivine i torzije.

Zadatak 3.3. Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva i definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(t) \times \beta'(t)dt. \qquad (\star)$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju. (Pomoć: $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$.)

Sada pretpostavimo da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ (parametrizovana dužinom luka) ima konstantnu torziju $\tau \equiv 1$. Pokazati da je γ oblika $(\star)$ sa odgovarajućom krivom $s \mapsto \beta(s) \in S^2$. (Pomoć: uzmite binormalno vektorsko polje.)

Zadatak 3.4. Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ funkcija i definišimo $\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(s)ds$. Provjerite da

$$\gamma(s) := (\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s)ds, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(s)ds, 0)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 4

(*Krive: Prilagodjeni okviri, paralelna normalna polja*)

.

Zadatak 4.1. Dokažite da su bilo koja dva paralelna prilagodjena okvira krive $t \mapsto \gamma(t)$ povezana konstantnom rotacijom u normalnoj ravni.

Zadatak 4.2. Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju.

Izrazite krivinu i torziju krive pomoću κ_1 i κ_2 paralelnog okvira i obratno.

Zadatak 4.3. Nadjite paralelni prilagodjeni okvir za kružni heliks.

Zadatak 4.4. Pokažite da kriva uzima vrijednosti na sferi ako i samo ako krivine κ_1 i κ_2 paralelnog okvira zadovoljavaju jednačinu linije na ravni.

Kako se može pročitati radijus sfere iz ove jednačine?

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 5

(*Površi: reprezentacija i prva fundamentalna forma*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 16og decembra.

Zadatak 5.1. Pokažite da $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (u, v, g(u,v)) \in \mathbb{R}^3$, gdje

$$g(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{if } u = v = 0 \\ \frac{uv^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^4} & \text{if } (u,v) \neq (0,0) \end{cases},$$

nije površ (iako je g neprekidna i svi su izvodi u pravcu definisani).

Zadatak 5.2. Posmatrajmo $\Sigma := \{(x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, gdje je $0 < r < R$. Poakažite da je Σ regularna površ i nadjite njenu regularnu parametrizaciju.

Zadatak 5.3. Pokažite da je elipsoid regularna površ i nadjite regularne parametrizacije koje ga pokrivaju.

Zadatak 5.4. Nadjite konformalnu parametrizaciju (provjeriti!) za

$$\Sigma = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Zadatak 5.5. Uvjerite se da je površ parametrizovana konformalno ako i samo ako parametrizacija prezervira uglove.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 6

(*Površi: tangentna ravan i razvojne površi*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 23og decembra.

Zadatak 6.1. Neka je $\Sigma := \{(x,y,z)\,|\,F(x,y,z) = 0\}$ i pretpostavimo da je $\nabla F(x,y,z) \neq 0$ za sva $(x,y,z) \in \Sigma$ (tako da je Σ regularna površ). Pokažite da je $\mathbf{N} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ jedinično normalno vektorsko polje na Σ

Zadatak 6.2. Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. Ispitajte kako se Gaussovo preslikavanje mijenja duž pravih linija na Σ.

Zadatak 6.3. Pokažite da je kupa $(r,\theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izomqtrčna ravni.

Pokažite da je $\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ izometrična ravni.

Zadatak 6.4. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovana kriva sa $\kappa \neq 0$; izračunajte prvu fundamentalnu formu odgovarajuće tangentne razvojne površi.

Nadjite ortogonalnu (tj., $F \equiv 0$) reparametrizaciju povrŕsi (kao razvojnu površ).

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 7

(*Površi: Druga fundamentalna forma i operator oblika*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 5tog decembra.

Zadatak 7.1. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v\,\eta(u)$ razvojna površ. Pokažite da je $v \mapsto \mathbf{N}(u, v)$ paralelno normalno polje duž $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

Zadatak 7.2. Izračunajte drugu fundamentalnu formu helikoida.

Zadatak 7.3. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v\,\eta(u)$ linijska površ. Pokažite da su linije $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ (u fiksno), asimptotske linije.

Zadatak 7.4. Dokažite Meusnierovu teoremu.

Zadatak 7.5. Izračunajte Gaussovu krivinu razvojne površi.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 8

(*Površi: Minimalne površi*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 13tog decembra.

Zadatak 8.1. Pokažite da je helikoid minimalna površ i odredite njegove asimptotske linije i linije krivine.

Zadatak 8.2. Pokažite da je *Enneperova površ* $(u,v) \mapsto (u^3 - 3u(1+v^2), v^3 - 3v(1+u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ.

Zadatak 8.3. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ konformalno parametrizovana minimalna površ. Pokažite da se njena druga fundamentalna forma može napisati kao $\mathrm{I\!I} = \mathrm{Re}\{(e - if)(du + idv)^2\}$ i da je $(e^\alpha - if^\alpha) = e^{i\alpha}(e - if)$ za površi $\mathbf{x}^\alpha$ asocijativne porodice od $\mathbf{x}$.

Zaključite da asimptotske linije i linije krivine od $\mathbf{x}$ postaju asimptotske linije i linije krivine na $\mathbf{x}^*$, respektivno.

Zadatak 8.4. Pretpostavimo da površ bez pupčanih tačaka $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ ima konstantnu srednju krivinu $H \neq 0$. Dokažite da $(u,v) \mapsto \mathbf{x}^*(u,v) := \mathbf{x}(u,v) + \frac{1}{H}\mathbf{N}(u,v)$ ima konformalno ekvivalentnu metriku $\mathrm{I}^* = \frac{H^2 - K}{H^2}\,\mathrm{I}$ i konstantnu srednju krivinu $H^* = H$.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 9

(*Površi: fundamentalne jednačine*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu 9tog januara 2008.

Zadatak 9.1. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gauss - ovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka generalnosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ. Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,(du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.)

Zadatak 9.2. Pokažite da je Gaussova krivina konformalno paramterizovane površi data sa

$$K = -\tfrac{1}{2E}\Delta \ln E.$$

Zadatak 9.3. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine minimalne površi. Pokažite da $E^2K \equiv const$ i zaključite da $\ln E$ mora zadovoljavati Liouvilleovu jednačinu,

$$\Delta \ln E = const\, e^{-\ln E}.$$

Zadatak 9.4. Pokažite da je Gaussova krivina površi invarijantna pod reparamterizacijom i zaključite da Gaussova krivina nestaje ako je površ (lokalno) izometrična ravni, tj., prima izometričnu para – metrizaciju.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 10

(*Površi: geodezije*)

Predati rješenja na kraju predavanja u nikad.

Zadatak 10.1. Pokažite da su prave linije na linijskoj površi geodezije.

Zadatak 10.2. Nadjite geodezije na ravni $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$.

Zadatak 10.3. Neka je $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ cilindar na krivoj u (x, y)-ravni. Dokažite da je geodezija na Σ (opšti) heliks.

Zadatak 10.4. Parametrišite $S^2(R) = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ pomoću geodezijskih polarnih koordinata oko $P = (0, 0, R)$.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 1

(*Krive: reprezentacija, dužina luka i oskulatorna ravan*)

Zadatak 1.1. Pokažite da su konični presjeci $x^2+y^2=z^2$, $x\cos\alpha+z\sin\alpha=d$, gdje $\alpha\in\mathbb{R}$ i $d\neq 0$ krive (potvrdite da su gradijenti odgovarajuće odabranih funkcija linearno nezavisni u svim tačkama krive) i nadjite njihove parametrizacije.

Rješenje. Prvo neka je

$$F_1(x,y,z):=x^2+y^2-z^2 \quad \text{i} \quad F_2(x,y,z):=x\cos\alpha+z\sin\alpha-d$$

kako bismo dobili

$$C=\{(x,y,z)\,|\,F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=0\}.$$

Onda

$$\nabla F_1(x,y,z)=2(x,y,-z) \quad \text{i} \quad \nabla F_2(x,y,z)=(\cos\alpha,0,\sin\alpha)\neq 0.$$

Dva gradijenta su linearno zavisni ako i samo ako

$$0=\nabla F_1(x,y,z)\times\nabla F_2(x,y,z)=2(y\sin\alpha,-(x\sin\alpha+z\cos\alpha),-y\cos\alpha),$$

to jest, $(x,y,z)=\lambda(\cos\alpha,0,-\sin\alpha)$ za neko $\lambda\in\mathbb{R}$; Stavljajući ovo nazad u F_1 i F_2 dobivamo:

$$\begin{array}{rcl} F_1(x,y,z) & = & \lambda^2\cos 2\alpha, \\ F_2(x,y,z) & = & \lambda\cos 2\alpha-d, \end{array}$$

koje ne mogu istovremeno nestati, tj., $(x,y,z)=\lambda(\cos\alpha,0,-\sin\alpha)\notin C$. Stoga, po teoremi implicitnog preslikavanja, C opisuje regularnu krivu.

Sada pisemo ravan

$$\{p=p_0+\lambda e_1+\mu e_2\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\},$$

gdje $p_0:=d(\cos\alpha,0,\sin\alpha)$, $e_1:=(-\sin\alpha,0,\cos\alpha)$ i $e_2=(0,1,0)$. Onda konusna jednačina $F_1(x,y,z)=0$ izgleda kao

$$0=(d\cos\alpha-\lambda\sin\alpha)^2+\mu^2-(d\sin\alpha+\lambda\cos\alpha)^2=d^2\cos 2\alpha+\mu^2-\lambda^2\cos 2\alpha-2d\lambda\sin 2\alpha. \quad (\star)$$

Razlikujemo tri slučaja::

<u>$\cos 2\alpha>0.$</u> Onda $(\star)$ možemo ponovo napisati kao

$$\left(\tfrac{\lambda\cos 2\alpha+d\sin 2\alpha}{d}\right)^2-\left(\tfrac{\mu\sqrt{\cos 2\alpha}}{d}\right)^2=1,$$

što je jednačina hiperbole; parametrizacija je data sa

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\lambda(t)\cos 2\alpha+d\sin 2\alpha}{d} & = & \pm\cosh t \\ \frac{\mu(t)\sqrt{\cos 2\alpha}}{d} & = & \sinh t \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda(t) & = & d\frac{\pm\cosh t-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \\ \mu(t) & = & d\,\frac{\sinh t}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \end{array}\right. .$$

<u>$\cos 2\alpha=0.$</u> Ovdje se $(\star)$ pojednostavi na

$$\mu^2=2d\sin 2\alpha\,\lambda$$

tako da se kriva može parametrizovati sa

$$\mu(t)=t \quad \text{i} \quad \lambda(t)=\tfrac{t^2}{2d\sin 2\alpha}$$

(primjetite da $\sin 2\alpha=\pm 1\neq 0$ jer $\cos 2\alpha=0$).

<u>$\cos 2\alpha<0.$</u> Slično slučaju za $\cos 2\alpha>0$, $(\star)$ se može napisati kao

$$\left(\tfrac{\lambda\cos 2\alpha+d\sin 2\alpha}{d}\right)^2+\left(\tfrac{\mu\sqrt{-\cos 2\alpha}}{d}\right)^2=1,$$

što je jednačina elipse; parametrizacija je data sa

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\lambda(t)\cos 2\alpha + d\sin 2\alpha}{d} & = & \cos t \\ \frac{\mu(t)\sqrt{-\cos 2\alpha}}{d} & = & \sin t \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda(t) & = & d\frac{\cos t - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \\ \mu(t) & = & d\,\frac{\sin t}{\sqrt{-\cos 2\alpha}} \end{array}\right. .$$

Zadatak 1.2. Pokazati da je dužina luka invarijantna pod reparametrizacijom parametrizovane krive.

Rješenje. Želimo izračunati dužinu luka reparametrizovane krive $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \gamma(u(t))$ izmedju dvije tačke $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(u(t_0))$ i $\tilde{\gamma}(t_1) = \gamma(u(t_1))$.

Prvo pretpostavimo da je $u' > 0$ (primjetiti da $t \mapsto u'(t)$ ne mijenja znak jer je nepreikdna) tako da obje, γ i $\tilde{\gamma}$ parametrišu krivu u istom pravcu. Onda

$$\int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\gamma}'(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(u(t))|\,u'(t)dt = \int_{u(t_0)}^{u(t_1)} |\gamma'(u)|\,du$$

tako da je dužina luka $\tilde{\gamma}$ izmedju $\tilde{\gamma}(t_0)$ i $\tilde{\gamma}(t_1)$ ista kao dužina luka γ izmedju $\gamma(u(t_0))$ i $\gamma(u(t_1))$ kao što smo i tražili.

Sada pretpostavimo da je $u' < 0$, to jest, da su dvije parametrizacije u suprotnim pravcima. Onda

$$\int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\gamma}'(t)|\,dt = -\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(u(t))|\,u'(t)dt = -\int_{u(t_0)}^{u(t_1)} |\gamma'(u)|\,du = \int_{u(t_1)}^{u(t_0)} |\gamma'(u)|\,du$$

tako da su dužine ponovo iste.

Zadatak 1.3. Posmatrajmo krivu datu implicitno sa $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$ i $a\sqrt{b^2-c^2}\,z = c\sqrt{a^2-b^2}\,x$, gdje $a > b > c$. Izračunajte njenu dužinu luka i nadjite reparametrizaciju dužinom luka.

Rješenje. Prateći praksu iz problema 1.1 napisaćemo ravan kao

$$\{p = p_0 + \lambda e_1 + \mu e_2 \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

sa $p_0 := (0,0,0)$, $e_1 = (\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}, 0, \frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}})$ i $e_2 = (0,1,0)$. Primjetiti da je (e_1, e_2) ortonormalna baza za ravan.

Stavljajući ovaj ansatz u jednačinu elipsoida, dobijamo

$$\lambda^2 + \mu^2 = b^2,$$

to jest, jednačinu kružnice radijusa b. Parametrizacija kružnice je data sa

$$\lambda(t) = b\,\cos t \quad \text{i} \quad \mu(t) = b\,\sin t,$$

tj.,

$$\gamma(t) = (\tfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\cos t, b\,\sin t, \tfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\cos t).$$

Stoga $|\gamma'(t)|^2 \equiv b^2$ i $s(t) = \int_0^s b\,dt = ts$ (mjereno od $s_0 = 0$) tako da je reparametrizacija dužinom luka kružnice data sa

$$\gamma(s) = b\,\{e_1 \cos \tfrac{s}{b} + e_2 \sin \tfrac{s}{b}\} = (\tfrac{a\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\cos \tfrac{s}{b}, b\,\sin \tfrac{s}{b}, \tfrac{c\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\cos \tfrac{s}{b}).$$

Zadatak 1.4. Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t.

Rješenje. Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t. Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom.

Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$.

Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 2

(*Krive: krivina i torzija*)

Zadatak 2.1. Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive.

Rješenje. Neka je $\gamma(t) := e^t(\cos t, \sin t)$; Onda $|\gamma'(t)|^2 = 2e^{2t}$ i ako izračunamo dužinu luka od $t = 0$,

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)|\, dt = \sqrt{2}(e^t - 1) \quad \Leftrightarrow \quad t(s) = \ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}).$$

Stoga je

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = (1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}})\,(\cos\ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}), \sin\ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}))$$

reparametrizacija dužinom luka krive γ.

Sada, njena krivina je, do znaka, data sa

$$\kappa^2(s) = |\tilde{T}'(s)|^2 = |\tilde{\gamma}''(s)|^2 = \tfrac{1}{(\sqrt{2}+s)^2} = \tfrac{1}{2e^{2t}}.$$

Zadatak 2.2. Uvjerite se da se oskulatorna kružnica dužinom luka parametrizovane krive γ u tački $\gamma(s_0)$ (koristite $s_0 = 0$ kako bi vam bilo lakše) doista može parametrizovati (dužinom luka) tako da se Taylorovi polinomi drugog reda zaista poklapaju.

Rješenje. Parametiziramo oskulatornu kružnicu na slijedeći način (uz pretpostavku da je $s_0 = 0$):

$$s \mapsto \alpha(s) := \gamma(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)}\, N(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)}\{\sin(\kappa(0)s)\, T(0) - \cos(\kappa(0)s)\, N(0)\}.$$

Primjetimo da je ovo parametrizacija dužinom luka jer

$$|\alpha'(s)|^2 = |\cos(\kappa(0)s)\, T(0) + \sin(\kappa(0)s)\, N(0)|^2 \equiv 1.$$

Onda:

$$\begin{array}{rcll} \alpha(0) & = & \gamma(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)}\, N(0) - \tfrac{1}{\kappa(0)}\, N(0) = \gamma(0) & \text{(dodir nultog reda)}, \\ \alpha'(0) & = & \cos(0)\, T(0) = \gamma'(0) & \text{(dodir prvog reda)}, \\ \alpha''(0) & = & \kappa(0)\cos(0)\, N(0) = T'(0) = \gamma''(0) & \text{(dodir drugog reda)}; \end{array}$$

stoga se izvodi od γ i α poklapaju u $s = s_0 = 0$ do drugog reda i, posljedično, Taylorovi polinomi drugog reda od γ i α su isti u $s = 0$.

Zadatak 2.3. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ parametrizovana kriva tako da $T'(t) \neq 0$, $\forall t$. Pokazati da možemo izabrati $N = \frac{T'}{|T'|}$ i da, sa ovim izborom N,

$$\kappa = \tfrac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} \quad \text{i} \quad \tau = \tfrac{|\gamma', \gamma'', \gamma'''|}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

Rješenje. Prvo, $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ je jedinično tangentno vektorsko pokje duž γ i stoga

$$T' \cdot T = \tfrac{1}{2}(|T|^2)' \equiv 0$$

tako da $N := \frac{T'}{|T'|}$ definiše jedinično normalno polje duž γ čim imamo $T' \neq 0$. Dalje,

$$\gamma'' = (|\gamma'|\, T)' = |\gamma'|'\, T + |\gamma'|\, T' \in \operatorname{span}\{T, N\}$$

tako da je N principalno normalno polje.

Sada posmatrajmo reparametrizaciju dužinom luka $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ krive $t \mapsto \gamma(t)$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\gamma}'(s) & = & t'(s)\, \gamma'(t(s)) \\ \tilde{\gamma}''(s) & = & t'^2(s)\, \gamma''(t(s)) + t''(s)\, \gamma'(t(s)) \\ \tilde{\gamma}'''(s) & = & t'^3(s)\, \gamma'''(t(s)) +?\, \gamma''(t(s)) +?\, \gamma'(t(s)) \end{array}$$

sa $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$ i $t''(s) = -\frac{\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^3}\, t' = -\frac{\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^4}$. Stoga

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \tilde\kappa(s) = \tilde T'(s)\cdot \tilde N(s) = |\tilde T'(s)| = |\tilde\gamma''(s)| = \tfrac{\sqrt{|\gamma'(t)|^2|\,\gamma''(t)|^2-(\gamma'(t)\cdot\gamma''(t))^2}}{|\gamma'(t)|^3} = \tfrac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3};\\
\tau(t) &= \tilde\tau(s) = (\tilde T(s)\times\tilde N(s))\cdot\tilde N'(s) = |\tilde T(s),\tilde N(s),\tilde N'(s)| = |\tilde\gamma'(s),\tfrac{\tilde\gamma''(s)}{\tilde\kappa(s)},(\tfrac{\tilde\gamma''(s)}{\tilde\kappa(s)})'|\\
&= \tfrac{1}{\tilde\kappa^2(s)}|\tilde\gamma'(t),\tilde\gamma''(t),\tilde\gamma'''(t)| = \tfrac{t'^6(s)}{\tilde\kappa^2(s)}|\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)| = \tfrac{|\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)|}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2|}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.4. Naći krivinu i torziju krive

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}).$$

Dajte geometrijski argument zašto τ nestaje.

Rješenje. Koristimo formule iz problema 2.3:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (1, -\tfrac{1}{t^2}, -(1+\tfrac{1}{t^2})),\\
\gamma''(t) &= (0, \tfrac{2}{t^3}, \tfrac{2}{t^3})),\\
\gamma'''(t) &= (0, -\tfrac{6}{t^4}, -\tfrac{6}{t^4})),
\end{aligned}$$

tako da

$$\kappa(t) = \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\tfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2+t^4}^3} \quad \text{i} \quad \tau(t) \equiv 0$$

jer $|\gamma',\gamma'',\gamma'''| \equiv 0$. (Primjetiti da je kriva samo definisana za $t \neq 0$ i da znak krivine zavisi od izbora pravca za principalnu normalu.)

Torzija nestaje jer je kriva planarna (u ravni):

$$\begin{aligned}
\gamma(t)-\gamma(1) &\perp (1,-1,1) \quad \text{for} \quad t>0,\\
\gamma(t)-\gamma(-1) &\perp (1,-1,1) \quad \text{for} \quad t<0.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.5. Neka je $s \mapsto \tau(s)$ proizvoljna funkcija. Naći dužinom luka parametrizovanu krivu $s \mapsto \gamma(s)$ sa krivinom $\kappa \equiv 0$ torzijom τ (provjerite krivinu i torziju!).

Rješenje. Neka je $\gamma(s) := (s,0,0)$; onda $T(s) = \gamma'(s) = (1,0,0)$ i, stoga, γ je parametrizovana dužinom luka.

Neka je $\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} \tau(s)ds$. Izaberimo $N(s) := (0, \cos\varphi, \sin\varphi)$; onda je N jedinično principalno normalno polje krive γ jer je $N \perp T$ i $\gamma'' = 0 \in \mathrm{span}\{\gamma', N\}$.

Konačno, $B(s) = T(s) \times N(s) = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi)$; tako da

$$\kappa(s) = T'(s)\cdot N(s) \equiv 0 \quad \text{i} \quad \tau(s) = N'(s)\cdot B(s) = \varphi'(s) = \tau(s).$$

Geometrijski, ova kriva je prava (sa neodredjenom oskulatornom ravni i stoga principalnim normalnim pravcem) gdje njena “principalna normala” N rotira prikladnom brzinom kako bi nam dala torziju τ.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 3

(*Krive: Frenetove jednačine*)

Zadatak 3.1. Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su κ i τ krivina i torzija krive γ. Definišimo "Darboux-ovo vektorsko polje"

$$\delta := N \times N' = \tau\, T + \kappa\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

Rješenje. Pretpostavimo da naš okvir $F = (T, N, B)$ zadovoljava Frenetove jednačine i neka je $\delta := N \times N'$; onda, prvo,

$$\delta = N \times (-\kappa T + \tau B) = \kappa B + \tau T$$

kako smo tvrdili jer F uzima vrijednosti u $SO(3)$; drugo,

$$\begin{array}{rcccl} T' - \delta \times T & = & \kappa N - (\tau\, T + \kappa\, B) \times T & = & 0, \\ N' - \delta \times N & = & -\kappa T + \tau B - (\tau\, T + \kappa\, B) \times N & = & 0, \\ B' - \delta \times B & = & -\tau N - (\tau\, T + \kappa\, B) \times B & = & 0. \end{array}$$

Stoga, Frenetove jednačine impliciraju jednačine $X' = \delta \times X$, gdje $X = T, N, B$.

S druge strane, pretpostavimo da je $s \mapsto F(s) = (T(s), N(s), B(s)) \in SO(3)$ okvir koji zadovoljava $X' = \delta \times X$ za $X = T, N, B$ sa $\delta := \tau T + \kappa B$. Onda, obrčući gornju pretpostavku, sobivamo

$$\begin{array}{ccccl} 0 & = & T' - \delta \times T & = & T' - \kappa N, \\ 0 & = & N' - \delta \times N & = & N' + \kappa T - \tau B, \\ 0 & = & B' - \delta \times B & = & B' + \tau N. \end{array}$$

Stoga, dobijamo Frenetove jednačine.

Zadatak 3.2. Pokazati da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ uzima vrijenosti u sferi ako i samo ako njene normalne ravni prolaze kroz (fiksnu) tačku $c \in \mathbb{R}^3$ (centar sfere). Pomoć: kada budete provjeravali konstantnu udaljenost $|\gamma - c|^2$ *nemojte* izražavati koeficijente c pomoću krivine i torzije.

Rješenje. Pretpostavljamo da je kriva regularna i, bez gubitka opštosti, da je parametrizovana dužinom luka.

Ako je $|\gamma - c|^2 \equiv r^2$ za neko $c \in \mathbb{R}^3$ i $r \in (0, \infty)$ onda je, uzimajući izvod, $0 \equiv (\gamma - c) \cdot T$, to jest, c leži na svakoj normalnoj ravni krive γ.

S druge strane, pretpostavimo da sve normalne ravni prolaze kroz fiksnu tačku $c \equiv \gamma + \alpha N + \beta B$. Frenetove jednačine daju

$$0 = (1 - \alpha\kappa)\, T + (\alpha' - \beta\tau)\, N + (\beta' + \alpha\tau)\, B$$

tako da, posebice, $\alpha' = \beta\tau$ i $\beta' = -\alpha\tau$. Onda,

$$(|\gamma - c|^2)' = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' = 2\alpha\beta\tau - 2\beta\alpha\tau = 0,$$

to jest, $|\gamma - c| \equiv \mathit{const}$ tako da γ leži u sferi centriranoj u c.

Drugi dio se može dokazati i mnogo brže drugim argumentom (medjutim, gornji argument fino demonstrira šire aplikativnu metodu): da sve normalne ravni prolaze prolaze kror fiksnu ta@ cku $c \in \mathbb{R}^3$ znači da

$$0 \equiv (c - \gamma) \cdot T = -\tfrac{1}{2}(|\gamma - c|^2)';$$

stoga $|\gamma - c|^2 \equiv \mathit{const}$ i kriva uzima vrijednosti u sferi centriranoj u c.

Zadatak 3.3. Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva i definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(t) \times \beta'(t) dt. \qquad (\star)$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju. (Pomoć: $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$.)

Sada pretpostavimo da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ (parametrizovana dužinom luka) ima konstantnu torziju $\tau \equiv 1$. Pokazati da je γ oblika $(\star)$ sa odgovarajućom krivom $s \mapsto \beta(s) \in S^2$. (Pomoć: uzmite binormalno vektorsko polje.)

Rješenje. Prvo, posmatrajmo $\gamma = \int \beta \times \beta'(t) dt$: imamo

$$\begin{aligned} \gamma' &= \beta \times \beta', \\ \gamma'' &= \beta \times \beta'', \\ \gamma''' &= \beta' \times \beta'' + \beta \times \beta'''. \end{aligned}$$

Sada, $|\beta|^2 \equiv 1$ tako da $\beta' \perp \beta$ i

$$|\gamma'|^2 = |\beta|^2 |\beta'|^2 = |\beta'|^2 > 0$$

jer je β regularna; stoga je γ regularna.

Kako bismo izračunali torziju, koristimo formulu

$$\tau = \frac{|\gamma', \gamma'', \gamma'''|}{|\gamma' \times \gamma''|^2} = \frac{((\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'') \cdot (\beta' \times \beta'' + \beta \times \beta'''))}{|(\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'')|^2} = \frac{|\beta, \beta', \beta''|^2}{|\beta|^2 |\beta, \beta', \beta''|^2} \equiv 1$$

jer je $(\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'') = \beta\, |\beta, \beta', \beta''|$. Ovdje nailazimo na problem kada $|\beta, \beta', \beta''| = 0$, tj., ako su β, β' i β'' linearno zavisni. Ako se ovo dogodi u izolovanim tačkama, to ne stvara problem jer je τ glatka funkcija i stoga će biti 1 u tim tačkama zbog neprekidnosti; ako se to dogodi na intervalu onda γ' i γ'' postaju linearno zavisne na tom intervalu i taj dio krive je prava linija sa nejedinstvenom torzijom (stoga, možemo smatrati da prava linija ima torziju $\tau \equiv 1$).

Za obratno, uzmimo $\beta := B$, gdje B označava binormalu Frenetovog okvira. Onda, očito, $s \mapsto \beta(s) \in S^2$ i

$$\beta \times \beta' = B \times (-\tau N) = \tau N \times B = T = \gamma'.$$

Odavde $\int_{s_0}^{s} \beta \times \beta'(s) ds = \gamma(s) - \gamma(s_0)$ i formula koju smo tvrdili je tačna do translacije krive.

Zadatak 3.4. Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ funkcija i definišimo $\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(s) ds$. Provjerite da

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s) ds, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(s) ds, 0\right)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$.

Rješenje. Ovo je pravolinijski po diferencijaciji: imamo

$$\gamma' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

po FTPK, tako da je $|\gamma'| \equiv 1$ i γ je parametrizovana dužinom luka. Kako je (x, y)-ravan fiksna oskulatorna ravan za cijelu krivu možemo izabrati kao principalnu normalu,

$$N := (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

(ovo dobijemo $90°$ rotacijom iz $T = \gamma'$ u (x, y)-ravni u pozitivnom smislu); sa ovim izborom principalne normale

$$T' \cdot N = (-\varphi' \sin\varphi, \varphi' \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \varphi' = \kappa$$

i kriva ima krivinu κ (obrćući principalnu normalu bi rezultiralo u krivini $-\kappa$).

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 4

(*Krive: Prilagodjeni okviri, paralelna normalna polja*)

.

Zadatak 4.1. Dokažite da su bilo koja dva paralelna prilagodjena okvira krive $t \mapsto \gamma(t)$ povezana konstantnom rotacijom u normalnoj ravni.

Rješenje. Prvo primjetite da su bilo koja dva prilagodjena okvira $F, \tilde{F}$ povezana sa rotacijom: $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ 0 & \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$

jer je $\tilde{F}(t), F(t) \in SO(3)$ i $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$.

Stoga, ako $\tilde{F} = (T, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2)$ i $F = (T, N_1, N_2)$, onda

$$\tilde{N}_1 = \cos\varphi\, N_1 + \sin\varphi\, N_2;$$

iz pretpostavke da oba su oba okvira paralelna saznajemo da

$$0 = \nabla^\perp \tilde{N}_1 = \varphi'(-\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2) + \cos\varphi\, \underbrace{\nabla^\perp N_1}_{=0} + \sin\varphi\, \underbrace{\nabla^\perp N_2}_{=0} = \varphi'(-\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2).$$

Kako $-\sin\varphi\, N_1 + \cos\varphi\, N_2 \neq 0$ moramo imati $\varphi' \equiv 0$. Primjetite da smo iskoristili u gornjoj računici da

$$\nabla^\perp(\lambda N) = (\lambda N)' - ((\lambda N)' \cdot T)\, T = \lambda' N + \lambda(N' - (N' \cdot T)\, T) = \lambda' N + \lambda \nabla^\perp N$$

za normalno polje $t \mapsto N(t)$ i bilo koju funkciju $t \mapsto \lambda(t)$.

Kratko rješenje bi bilo: mi znamo da paralelna normalna polja čine konstantan ugao (zbog primjedbe iz predavanja) — stoga prvi normalni vektori N_1 i $\tilde{N}_1$ od dva paralelna okvira F i $\tilde{F}$ čine kosntantan vektor, tako da to čine i njihove druge normale $N_2 = T \times N_1$ i $\tilde{N}_2 = T \times \tilde{N}_1$.

Zadatak 4.2. Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju.

Izrazite krivinu i torziju krive pomoću κ_1 i κ_2 paralelnog okvira i obratno.

Rješenje. Očito, $\tilde{F} = FA$ će biti još jedan prilagodjeni okvir, jer sa gornjim oblikom A, $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$ i A ima vrijednosti u $SO(3)$ tako da je $\tilde{F}$, sa F, s vrijednostima u $SO(3)$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da je kriva paramtetrizovana dužinom luka, tj. $|\gamma'| \equiv 1$.

Sada izračunamo $\tilde{\Phi} = \tilde{F}^t \tilde{F}' = A^t F^t (F'A + FA') = A^t \Phi A + A^t A'$ tako da

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1\cos\varphi - \kappa_2\sin\varphi & \kappa_1\sin\varphi - \kappa_2\cos\varphi \\ \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi & 0 & -(\tau + \varphi') \\ -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi & \tau + \varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

gdje κ_i i τ su krivine i torzija koje dolaze iz Φ. Stoga:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi, \\ \tilde{\kappa}_2 &= -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi, \\ \tilde{\tau} &= \tau + \varphi'. \end{aligned}$$

Sada pretpostavimo da je F paralelni okvir, $\tau = 0$ i $\tilde{F}$ je Frenet okvir, $\tilde{\kappa}_2 = 0$; onda

$$\kappa_1 \sin\varphi = \kappa_2 \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \pm\tfrac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \pm\tfrac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}$$

i

$$\pm\varphi' \tfrac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}} = \pm\left(\tfrac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}\right)' \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \tfrac{\kappa_1\kappa_2' - \kappa_1'\kappa_2}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}.$$

Stoga, krivina κ i torzija τ krive su date sa

$$\kappa = \pm\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2} \quad \text{i} \quad \tau = \tfrac{\kappa_1\kappa_2' - \kappa_1'\kappa_2}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}.$$

Obratno, ako je F Frenetov okvir, $\kappa_2 = 0$, i $\tilde{F}$ je paralelni okvir, $\tilde{\tau} = 0$, onda nalazimo da

$$0 = \tau + \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 - \textstyle\int_{s_0}^{s} \tau(s)ds$$

(φ_0 reflektira inicajlnu rotaciju paralelnog okvira u odnosu na Frenetov okvir koji može biti proizvoljno izabran) tako da dvije krivine $\tilde{\kappa}_i$ paralelnog okvira su date sa

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa\cos(\textstyle\int_{s_0}^{s} \tau ds - \varphi_0) \quad \text{i} \quad \tilde{\kappa}_2 = \kappa\sin(\textstyle\int_{s_0}^{s} \tau ds - \varphi_0)$$

u smislu krivine κ i torzije τ krive.

Zadatak 4.3. Nadjite paralelni prilagodjeni okvir za kružni heliks.

Rješenje. Parametrizacija je data sa $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$; Onda

$$\begin{array}{rclcr} T(t) & = & \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} & = & \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\,(-r\sin t, r\cos t, h) \\ N(t) & = & \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|} & = & -(\cos t, \sin t, 0) \\ B(t) & = & T(t)\times N(t) & = & \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\,(h\sin t, -h\cos t, r) \end{array}$$

daje prilagodjeni okvir. Tražimo paralelno normalno polje

$$N_1(t) = -\cos\varphi(t)\,N(t) + \sin\varphi(t)\,B(t);$$

stoga izračunamo

$$\begin{array}{rclcr} \nabla^{\perp}N & = & N' - (N'\cdot T)\,T & = & \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\,B \\ \nabla^{\perp}B & = & B' - (B'\cdot T)\,T & = & -\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\,N \end{array}$$

i

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla^{\perp}N_1 = \{\varphi' - \tfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\}\,\{\sin\varphi\,N + \cos\varphi\,B\}.$$

Stoga $F = (T, N_1, N_2)$ sa

$$\begin{array}{rclcl} N_1(t) & := & -\cos\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,N(t) + \sin\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,B(t) & & \\ N_2(t) & := & (T\times N_1)(t) & = & -\sin\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,N(t) - \cos\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,B(t) \end{array}$$

daje paralelni okvir za γ.

Primjetite da svaki drugi paralelni okvir se dobija konstantnom rotacijom datog: ovo se ogleda u konstantnoj integraciji za ϕ.

Zadatak 4.4. Pokažite da kriva uzima vrijednosti na sferi ako i samo ako krivine κ_1 i κ_2 paralelnog okvira zadovoljavaju jednačinu linije na ravni.

Kako se može pročitati radijus sfere iz ove jednačine?

Rješenje. Po prethodnom dogovoru, sve krive su regularne; stoga bez gubitka opštosti, kriva koju posmatramo $s \mapsto \gamma(s)$ je apametrizovana dužinom luka.

Prvo pretpostavimo da $s \mapsto \gamma(s)$ uzima vrijednosti na sferi, tj. $|\gamma - c|^2 \equiv r^2$ za centar $c \in \mathbb{R}^3$ i poluprečnik $r \in (0, \infty)$ sfere. Primjetite da stoga

$$(\gamma - c) \cdot T \equiv 0 \quad \text{i} \quad (\gamma - c)' = T \parallel T$$

tako da $N := \frac{1}{r}(\gamma - c)$ definiše paralelno normalno polje krive γ. Posljedično, svaki paralelni prilagodjeni okvir $F = (T, N_1, N_2)$ ima formu

$$N_1 = \cos\alpha\, N + \sin\alpha\, T \times N, \quad N_2 = T \times N_1 = -\sin\alpha\, N + \cos\alpha\, T \times N$$

sa nekom konstantom $\alpha \in \mathbb{R}$. Sada primjetite da

$$T' \cdot N = -T \cdot N' \equiv -\tfrac{1}{r} \quad \text{i} \quad T' \cdot (T \times N) = |T', T, N| = -|N, T, T'| =: \kappa_g$$

tako da odgovarajuće krivine su date sa

$$\kappa_1 = T' \cdot N_1 = \tfrac{1}{r} \cos\alpha + \kappa_g \sin\alpha \quad \text{i} \quad \kappa_2 = T' \cdot N_2 = -\tfrac{1}{r} \sin\alpha + \kappa_g \cos\alpha.$$

Kao posljedica,

$$(\kappa_1, \kappa_2) \cdot (\cos\alpha, -\sin\alpha) \equiv \tfrac{1}{r},$$

to jest, κ_1 i κ_2 zadovoljavaju jednačinu linije koja ima udaljenost $\frac{1}{r}$ od koordinatnog početka, gdje je r poluprečnik sfere.

Obratno, pretpostavimo da krivine κ_i paralelnog prilagodjenog okvira $F = (T, N_1, N_2)$ krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljavaju jednačinu linije koja ne prolazi kroz koordinatni početak,

$$(\kappa_1, \kappa_2) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) + \tfrac{1}{r} \equiv 0$$

za neke $\alpha \in \mathbb{R}$ i $r \in (0, \infty)$; Neka je

$$N := \cos\alpha\, N_1 + \sin\alpha\, N_2$$

i primjetite da iz strukturnih jednačina,

$$(rN)' = -r(\kappa_1 \cos\alpha + \kappa_2 \sin\alpha)\, T = T = \gamma'$$

tako da $\gamma = c + rN$ za neko $c \in \mathbb{R}^3$, to jest, γ uzima vrijednosti takes na sferi centriranoj u c sa poluprečnikom r jer je N jedinično normalno polje duž γ: $|\gamma - c|^2 \equiv r^2$.

Primejtite da, ako κ_i zadovoljavaju jednačinu linije koja prolazi kroz koordinatni početak, $\kappa_1 \cos\alpha + \kappa_2 \sin\alpha \equiv 0$, onda veoma sličan račun kao iznad daje $N' \equiv 0$ tako da kriva postaje planarna kriva, tj. na “sferi beskonačnog poluprečnika”.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 5

(*Površi: reprezentacija i prva fundamentalna forma*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 16og decembra.

Zadatak 5.1. Pokažite da $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (u,v,g(u,v)) \in \mathbb{R}^3$, gdje

$$g(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{if } u=v=0 \\ \frac{uv^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^4} & \text{if } (u,v) \neq (0,0) \end{cases},$$

nije površ (iako je g neprekidna i svi su izvodi u pravcu definisani).

Rješenje. Funkcija g je diferencijabila svugdje, osim moguće u $(u,v) = (0,0)$. Vidjećemo da $\mathbf{x}$, sa g, nije diferencijabilna u $(0,0)$: prvo, izračunaćemo izvod u pravcu funkcije g u $(u,v) = (0,0)$ u pravcu $w = (\cos\alpha, \sin\alpha)$:

$$\partial_w g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3|t|\cos\alpha\sin^2\alpha}{t^3(\cos^2\alpha + t^2\sin^4\alpha)} = \lim_{t\to 0} |t|\cos\alpha\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+t^2\sin^4\alpha} = 0;$$

konkretno, $g_u(0,0) = g_v(0,0) = 0$ i $\mathbf{x}_u(0,0) = (1,0,0)$ i $\mathbf{x}_v(0,0) = (0,1,0)$.

Sada posmatrajmo

$$\frac{\mathbf{x}(\lambda,\mu) - \mathbf{x}(0,0) - d_{(0,0)}\mathbf{x}(\lambda,\mu)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} = (0,0,\frac{\lambda\mu^2}{\lambda^2+\mu^4}) \to (0,0,\tfrac{1}{2}) \neq (0,0,0)$$

jer $(\lambda,\mu) \to (0,0)$ na krivoj $\lambda = \mu^2$. Stoga $\mathbf{x}$ (u stvari, g) nije diferencijabilna u $(u,v) = (0,0)$ i konsekventno, nije parametrizovana površ.

Zadatak 5.2. Posmatrajmo $\Sigma := \{(x,y,z) \,|\, (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, gdje je $0 < r < R$. Poakažite da je Σ regularna površ i nadjite njenu regularnu parametrizaciju.

Rješenje. Σ je r^2-nivo funkcije $F(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2$. Prvo ispitujemo gradijent funkcije F: za ovo primjetite da je $x^2+y^2 > 0$ za sva $(x,y,z) \in \Sigma$ jer

$$x^2+y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x,y,z) = R^2 + z^2 \geq R^2 > r^2 \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) \notin \Sigma.$$

stoga nema problema u računanju izvoda kvadratnog korjena i nalazimo

$$|\nabla F(x,y,z)|^2 = |2(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{\sqrt{x^2+y^2}}\,x, \frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{\sqrt{x^2+y^2}}\,y, z)|^2 = 4F(x,y,z) = 4r^2 \neq 0$$

za $(x,y,z) \in \Sigma$ tako da $\nabla F \neq 0$ na Σ i Σ je regularna površ po teoremi implicitnog preslikavanja.

Kako F jedino ovisi o x^2+y^2 (i z) površ je površ revolucije sa z-osom kao njenom osom: parametrizacija je data sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (\varrho(u)\cos v, \varrho(u)\sin v, \eta(u))$$

sa pogodnim funkcijama $u \mapsto \varrho(u) \in (0,\infty)$ i $u \mapsto \eta(u) \in \mathbb{R}$. Jednačina meridijanske krive (ϱ,η) onda čita

$$(\varrho - R)^2 + \eta^2 = r^2,$$

što je jednaqv cina kružnice sa poluprečnikom r i centrom $(R,0)$. Stoga možemo parametrizovati površ pomoću

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

Primjetite da je $\mathbf{x}$ 2π-periodična u oba pravca i da okružuje (u,v)-ravan oko torusa Σ beskonačno mnogo; konkretno, jedna parametrizacija $\mathbf{x}$ pokriva cijeli torus.

Regularnost $\mathbf{x}$ se provjerava direktno:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (-(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, 0) \end{aligned}$$

tako da

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v(u,v)|^2 = |-r(R+r\cos u)\,(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)|^2 = (R+r\cos u)^2 r^2 > 0$$

i $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ za sva (u,v). Primjetite da ovo daje drugi argument za regularnost Σ: površ je, kao slika regularne parametrizacije, regularna površ.

Zadatak 5.3. Pokažite da je elipsoid regularna površ i nadjite regularne parametrizacije koje ga pokrivaju.

Rješenje. Pišemo elipsoid sa dužinama polusa $a, b, c > 0$ kao skup prvog nivoa funkcije

$$(x,y,z) \mapsto F(x,y,z) := (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{b})^2 + (\tfrac{z}{c})^2,$$

tj., $\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,F(x,y,z) = 1\}$. Onda

$$\nabla F(x,y,z) = (\tfrac{2x}{a^2}, \tfrac{2y}{b^2}, \tfrac{2z}{c^2}) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) \notin \Sigma.$$

Primjetite da, na primjer, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \neq 0$ za $z \neq 0$ (i slično za $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)$). Stoga, po teoremi implicitnog preslikavanja, možemo napisati Σ dalje od njenog presjeka sa $z = 0$-ravni lokalno kao graf preko (x,y)-ravni. Štoviše,

$$\{(u,v)\,|\,(\tfrac{u}{a})^2 + (\tfrac{v}{b})^2 < 1\} \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (u, v, \pm\sqrt{1 - (\tfrac{u}{a})^2 - (\tfrac{v}{b})^2}) \in \Sigma$$

daje (regularne: vidi ispod) paramterizacije gornjeg i donjeg hemi-elipsoida. Slično,

$$\{(u,v)\,|\,(\tfrac{u}{a})^2 + (\tfrac{v}{c})^2 < 1\} \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (u, \pm\sqrt{1 - (\tfrac{u}{a})^2 - (\tfrac{v}{c})^2}, v) \in \Sigma$$
$$\{(u,v)\,|\,(\tfrac{u}{b})^2 + (\tfrac{v}{c})^2 < 1\} \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (\pm\sqrt{1 - (\tfrac{u}{b})^2 - (\tfrac{v}{c})^2}, u, v) \in \Sigma$$

daje regulane parametrizacije prednjih/zadnjih i lijevih/desnih hemi-elipsoida kao grafove preko (x,z)- i (y,z)-ravni, respektivno.

Što se tiče regularnosti: pretpostavimo da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (u, v, g(u,v))$ graf galtke funkcije g. Onda

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, g_u) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_v = (0, 1, g_v) \quad \text{hence} \quad \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-g_u, -g_v, 1) \neq (0,0,0)$$

tako da je graf površi uvijek regularan.

Primjetite da gornji pristup pokrivanja elipsoida sa 6 parametrizacija njenih (otvorenih) hemi-elipsoida nije jedini način rješavanja ovog problema: na primjer, prikladna alteracija uobičajenog sferičnih polarnih koordinata je još jedna mogućnost — u ovom slučaju, samo dvije parametrizacije su potrebne kako bismo pokrili elipsoid.

Zadatak 5.4. Nadjite konformalnu parametrizaciju (provjeriti!) za

$$\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Rješenje. Parametrišemo Σ (što je jednična sfera probijena na svojim sjevernim i južnim polovima) kao površ revolucije:

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$$

sa funkcijama $u \mapsto r(u) \in (0,\infty)$ i $u \mapsto h(u) \in \mathbb{R}$. Koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = r'^2 + h'^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = r^2.$$

Stoga konformalnost čita

$$r^2 = r'^2 + h'^2;$$

zajedno sa jedačinom sfere, $r^2 + h^2 = 1$ izvedemo diferencijalnu jednačinu za h:

$$1 - h^2 = \tfrac{h^2 h'^2}{1-h^2} + h'^2 \quad \Leftrightarrow \quad h'^2 = (1-h^2)^2;$$

rješenje ove (Riccatijeve) jednačine je $h(u) = \tanh u$. Sa ovim dobijemo $r(u) = \sqrt{1-h^2(u)} = \frac{1}{\cosh u}$ i stoga

$$\mathbf{x}(u,v) = (\tfrac{\cos v}{\cosh u}, \tfrac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

Kako bismo završili, provjerimo značajke:

$$(\tfrac{\cos v}{\cosh u})^2 + (\tfrac{\sin v}{\cosh u})^2 + (\tanh u)^2 = 1 \quad \text{i} \quad (\tanh u)^2 < 1,$$

u stvari, $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$ tako da $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \Sigma$ pokriva Σ u potpunosti; i konformalnost:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= \tfrac{1}{\cosh u}(-\tanh u \cos v, -\tanh u \sin v, \tfrac{1}{\cosh u}) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= \tfrac{1}{\cosh u}(-\sin v, \cos v, 0) \end{aligned}$$

tako da

$$E(u,v) = \tfrac{1}{\cosh^2 u} = G(u,v) \quad \text{i} \quad F(u,v) = 0.$$

Ovo nije jedina mogućnost konformalne parametrizacije sfere: posmatrajmo inverznu *stereografičnu projekciju*

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (\tfrac{2u}{1+u^2+v^2}, \tfrac{2v}{1+u^2+v^2}, \pm\tfrac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}).$$

(Primjetite da je $\mathbf{x}(u,v)$ tačka presjeka S^2 sa linijom koja prolazi kroz (u,v) (na njenoj ravni ekvatora) i njenog južnog (za $+$) respektivno sjevernog (za $-$) pola.) Onda

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \tfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\,(1-u^2+v^2, -2uv, \mp 2u), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \tfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\,(-2uv, 1+u^2-v^2, \mp 2v)$$

tako da koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju

$$E(u,v) = \tfrac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = G(u,v) \quad \text{i} \quad F(u,v) = 0.$$

Stoga, $\mathbf{x}$ omotava $\mathbb{R}^2$ oko $S^2 \setminus \{\mp(0,0,1)\}$ bijektivno na način koji prezervira uglove; i, konkretno, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \Sigma$ daje jedan-na-jedan konformalnu parametrizaciju Σ. Primjetite da konformalnost parametrizacije osigurava regularnost.

Zadatak 5.5. Uvjerite se da je površ parametrizovana konformalno ako i samo ako parametrizacija prezervira uglove.

Rješenje. Prvo pretpostavimo da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ konformalna parametrizacija površi, tj., $E = G$ i $F \equiv 0$. Uzmimo dvije krive $t \mapsto \gamma_i(t) = \mathbf{x}(u_i(t), v_i(t))$ $(i = 1,2)$ na površi koje se sijeku u $t = 0$; onda (cos) njihov ugao presjeka α (skratićemo argument zbog jasnosti)

$$\cos\alpha = \tfrac{\gamma_1'\cdot\gamma_2'}{|\gamma_1'|\,|\gamma_2'|} = \tfrac{E\,u_1'u_2' + F\,(u_1'v_2'+v_1'u_2') + G\,v_1'v_2'}{\sqrt{E\,u_1'^2+2Fu_1'v_1'+G\,v_1'^2}\sqrt{E\,u_2'^2+2Fu_2'v_2'+G\,v_2'^2}} = \tfrac{u_1'u_2'+v_1'v_2'}{\sqrt{u_1'^2+v_1'^2}\sqrt{u_2'^2+v_2'^2}}$$

je dat pomoću ugla presjeka krivih u parametarskoj ravni. To jest, parametrizacija prezervira uglove.

Obratno, pretpostavimo da parametrizacija prezervira uglove. Fiksirajmo (u,v) i posmatrajmo

(i) $\gamma_1(t) := \mathbf{x}(u+t, v)$ i $\gamma_2(t) := \mathbf{x}(u, v+t)$; onda

$$\tfrac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}(u,v) = \tfrac{\gamma_1'\cdot\gamma_2'}{|\gamma_1'|\,|\gamma_2'|}(0) \overset{!}{=} \tfrac{0}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F(u,v) = 0;$$

(ii) $\gamma_1(t) := \mathbf{x}(u+t, v+t)$ i $\gamma_2(t) := \mathbf{x}(u+t, v-t)$; onda

$$\tfrac{E-G}{\sqrt{E+G}\sqrt{E+G}}(u,v) = \tfrac{\gamma_1'\cdot\gamma_2'}{|\gamma_1'|\,|\gamma_2'|}(0) \overset{!}{=} \tfrac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(u,v) = G(u,v).$$

Stoga $E(u,v) = G(u,v)$ i $F(u,v) = 0$ za proizvoljno (u,v); stoga $E = G$ i $F \equiv 0$ i $\mathbf{x}$ je konformalna.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 6

(*Površi: tangentna ravan i razvojne površi*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 23og decembra.

Zadatak 6.1. Neka je $\Sigma := \{(x, y, z) \,|\, F(x, y, z) = 0\}$ i pretpostavimo da je $\nabla F(x, y, z) \neq 0$ za sva $(x, y, z) \in \Sigma$ (tako da je Σ regularna površ). Pokažite da je $\mathbf{N} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ jedinično normalno vektorsko polje na Σ

Rješenje. Fiksirajmo tačku $(x, y, z) \in \Sigma$. Moramo pokazati da je $\nabla F(x, y, z)$ perpendikularna na sve tangentne vektore krivih na Σ koje prolaze kroz (x, y, z) u ovoj tački. Stoga, neka je $t \mapsto \gamma(t)$ kriva na Σ, tj., $F \circ \gamma \equiv 0$, sa $\gamma(0) = (x, y, z)$. Sada

$$0 = (F \circ \gamma)'(0) = \nabla F(x, y, z) \cdot \gamma'(0),$$

to jest $\nabla F(x, y, z) \perp \gamma'(0)$, što pokazuje tvrdnju.

Zadatak 6.2. Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. Ispitajte kako se Gaussovo preslikavanje mijenja duž pravih linija na Σ.

Rješenje. Prateći primjer iz sekcije 2.4, linija $y = 1$, $z = x$ leži na Σ: parametrišemo liniju pomoću $v \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}}v, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}v)$; kako bismo vidjeli da je jednačina koja definiše Σ zadovoljena,

$$\frac{1}{2}v^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}v^2.$$

Takodje, znamo da je površ površ revolucije (jer je 0-ti nivo funkcije $F(x, y, z) = (x^2 + y^2) - z^2$, čija je zavisnost o x i y jedino u obliku $x^2 + y^2$, tj., udaljenost tačke od z-ose) oko z-ose. Odavdje dobivamo parametrizaciju površi rotirajući gornju liniju oko z-ose:

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je Σ linijska površ sa $\gamma(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, 1)$.

Zadatak 6.3. Pokažite da je kupa $(r, \theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izomqtrčna ravni.

Pokažite da je $\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ izometrična ravni.

Rješenje. Izračunaćemo prvu fundamentalnu formu:

$$E(r, \theta) = |\gamma(\theta)|^2 = 1, \quad F(r, \theta) = r\gamma(\theta) \cdot \gamma'(\theta) = 0, \quad G(r, \theta) = |r\gamma'(\theta)|^2 = r^2.$$

S druge strane, posmatrajmo polarne koordinate ravni, $(r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$, kao parametrizaciju ravni kako bismo našli *njenu* prvu fundamentalnu formu:

$$dr^2 + r^2\, d\theta^2.$$

Stoga, prva fundamentalna forma kupe se podudara sa prvom fundamentalnom formom ravni parametrizovane polarnim koordinatama i, stoga, one su izometrične površi.

Za drugi dio moramo odrediti γ kao parametrizaciju dužinom luka presjeka kupe sa jediničnom sferom: njene jednačine su

$$2z^2 = 1 \quad \text{i} \quad 2(x^2 + y^2) = 1.$$

Stoga

$$\theta \mapsto \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}\theta, \sin\sqrt{2}\theta, 1)$$

će biti dovoljno; $(r,\theta) \mapsto \frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}\theta, \sin\sqrt{2}\theta, 1)$ onda daje parametrizaciju izometričnu ravni u polarnim koordinatama po prvom dijelu ovoga problema.

Zadatak 6.4. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovana kriva sa $\kappa \neq 0$; izračunajte prvu fundamentalnu formu odgovarajuće tangentne razvojne površi.

Nadjite ortogonalnu (tj., $F \equiv 0$) reparametrizaciju povrřsi (kao razvojnu površ).

Rješenje. Izračunamo prvu fundamentalnu formu $(u,v) \mapsto \gamma(u) + v\,\gamma'(u)$:

$$\begin{array}{rcccc} E(u,v) & = & |\gamma'(u) + v\,\gamma''(u)|^2 & = & 1 + v^2\kappa^2(u), \\ F(u,v) & = & (\gamma'(u) + v\,\gamma''(u)) \cdot \gamma'(u) & = & 1, \\ G(u,v) & = & |\gamma'(u)|^2 & = & 1. \end{array}$$

Kako bismo našli reparametrizaciju kao linijske(!) povr si napravićemo ansatz

$$(u,v) \mapsto (\gamma(u) + \lambda(u)\gamma'(u)) + v\,\gamma'(u),$$

tj., mi "pomjeramo" originalnu krivu duž linija razvojne površi. Sada, uslov ortogonalnosti

$$0 = ((1+\lambda'(u))\gamma'(u) + (\lambda(u)+v)\gamma''(u)) \cdot \gamma'(u) = 1 + \lambda'(u);$$

stoga, ako izaberemo $\lambda(u) = -u$ dobićemo ortogonalnu reparametrizaciju

$$(u,v) \mapsto \gamma(u) + (v-u)\gamma'(u)$$

razvojne površi — kao razvojne površi jer

$$\mathbf{N}(u,v) = -\tfrac{\gamma' \times \gamma''}{|\gamma' \times \gamma''|}(u)$$

još uvijek ne zavisi o v (stoga $\mathbf{N}_v \equiv 0$).

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 7

(*Površi: Druga fundamentalna forma i operator oblika*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 5tog decembra.

Zadatak 7.1. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u)$ razvojna površ. Pokažite da je $v \mapsto \mathbf{N}(u,v)$ paralelno normalno polje duž $v \mapsto \mathbf{x}(u,v)$.

Rješenje. Da je vektorsko polje $v \mapsto N(v) := \mathbf{N}(u,v)$ paralelno duž prave linije $u \equiv const$, tj., duž $v \mapsto \gamma(v) := \mathbf{x}(u,v)$, znači

$$0 \equiv \nabla^\perp N = N' - \tfrac{(N'\cdot\gamma')}{|\gamma'|^2}\,\gamma'.$$

Jer je $\mathbf{x}$ razvojna površ, imamo da $N'(v) = \mathbf{N}_v(u,v) = 0$ tako da, očito, $\nabla^\perp N \equiv 0$.

Zadatak 7.2. Izračunajte drugu fundamentalnu formu helikoida.

Rješenje. Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u\,\{du^2 + dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \cosh u\,(\cos v, \sin v, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_v(u,v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1)$$

tako da (vidi Problem 5.4)

$$\mathbf{N}(u,v) = \tfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{E}\,(u,v) = (\tfrac{\sin v}{\cosh u}, -\tfrac{\cos v}{\cosh u}, \tanh u)$$

i

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u,v) &= \sinh u\,(\cos v, \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) &= \cosh u\,(-\sin v, \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) &= -\sinh u\,(\cos v, \sin v, 0) \end{aligned}$$

tako da

$$e(u,v) = 0, \quad f(u,v) = -1 \quad \text{i} \quad g(u,v) = 0$$

i stoga, $\mathrm{I\!I}|_{(u,v)} = -2\,du dv$.

Zadatak 7.3. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u)$ linijska površ. Pokažite da su linije $v \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ (u fiksno), asimptotske linije.

Rješenje. Fiksirajmo $u \equiv const$; Onda uslov kako bi kriva $v \mapsto \gamma(v) = \mathbf{x}(u,v)$ bila asimptotska linija ima oblik

$$0 \equiv e\,u'^2 + 2f\,u'v' + g\,v'^2 = g\,v'^2.$$

Stoga izračunamo

$$g(u,v) = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N}(u,v) = 0;$$

kako bismo vidjeli da je uslov ispunjen i da je γ asimptotska linija.

Zadatak 7.4. Dokažite Meusnierovu teoremu.

Rješenje. Fiksirajmo tangentni pravac T u tački $(x,y,z) \in \Sigma$, tj., $T \perp \mathbf{N}(x,y,z)$, gdje $\mathbf{N}(x,y,z)$ označava jediniňi normalni vektor u (x,y,z). Neka je κ_n normalna krivina pravca T; jer za T pretpostavljamo da je ne-asimptotski pravac imamo $\kappa_n \neq 0$ i možemo posmatrati "radijus krivine" $R_n = \frac{1}{\kappa_n}$ (bez gubitka generalnosti možemo pretpostaviti da je $R_n > 0$ nakon što moguće zamjenimo $\mathbf{N}(x,y,z)$ sa $-\mathbf{N}(x,y,z)$). Neka je $c_n := (x,y,z) + R_n\,\mathbf{N}(x,y,z)$.

Sada, fiksirajmo jedinični vektor $N \perp T$, koji *nije* tangentni vektor ($N \not\perp \mathbf{N}(x,y,z)$), i posmatrajmo krivu presjeka ravni

$$\mathcal{E} := \{(x,y,z) + \lambda T + \mu N \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

sa Σ. Pretpostavićemo da je N izabrana tako da $\cos\varphi := N \cdot \mathbf{N}(x, y, z) > 0$. Jer je $\kappa = \frac{1}{\cos\varphi}\kappa_n$ dobivamo radijus i centar oskulatrone kružnice presječne krive:

$$R = \cos\varphi\, R_n \quad \text{i} \quad c = (x, y, z) + R\, N.$$

Stoga oskulatorna kružnica može biti parametrizovana sa

$$t \mapsto \alpha(t) = c + R\,\{\cos t\, T + \sin t\, N\};$$

onda

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - c_n|^2 &= |R\cos t\, T + R(1 + \sin t)\, N + R_n\mathbf{N}(x, y, z)|^2 \\ &= 2R(R - R_n\cos\varphi)(1 + \sin t) + R_n^2 \\ &= R_n^2 \end{aligned}$$

što pokazuje da je oskulatorna kružnica na sferi sa centrom c_n i radijusom R_n; primjetite da ova sfera dotiče Σ u (x, y, z) jer je (x, y, z) na njoj i ima istu normalu $\mathbf{N}(x, y, z)$ kao površ u ovoj tački, tako da se tangentne ravni površi i sfere podudaraju.

Zadatak 7.5. Izračunajte Gaussovu krivinu razvojne površi.

Rješenje. Razvojna površ je oblika $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v\eta(u)$ sa $\mathbf{N}_v \equiv 0$. Stoga, računajući koeficijente druge fundamentalne forme nalazimo

$$f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v \equiv 0 \quad \text{i} \quad g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v \equiv 0.$$

Stoga je $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \equiv 0$.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 8

(*Površi: Minimalne površi*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu, 13tog decembra.

Zadatak 8.1. Pokažite da je helikoid minimalna površ i odredite njegove asimptotske linije i linije krivine.

Rješenje. Helikoid može biti parametrisan sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

sa prvom i drugom fundamentalnom formom

$$\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \,\{du^2 + dv^2\} \quad \mathrm{i} \quad \mathrm{I\!I}|_{(u,v)} = -2\, du dv,$$

kako je izračunato ranije. Stoga

$$\mathrm{S}|_{(u,v)} = \tfrac{1}{\cosh^2 u} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

što očito ima $2H = \operatorname{tr} \mathrm{S} \equiv 0$.

Jednačine za linije krivine i asimptotske linije postaju

$$0 = (Ef - Fe)\, u'^2 + (Eg - Ge)\, u'v' + (Fg - Gf)\, v'^2 = \cosh^2 u\{-u'^2 + v'^2\}$$

i

$$0 = e\, u'^2 + 2f\, u'v' + g\, v'^2 = -2\, u'v',$$

respektivno. Stoga su asimptotske linije parametarske linije $u \equiv const$ i $v \equiv const$ i linije krivine su linije $u \pm v \equiv const$.

Zadatak 8.2. Pokažite da je *Enneperova površ* $(u,v) \mapsto (u^3 - 3u(1+v^2), v^3 - 3v(1+u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ.

Rješenje. Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_u(u,v) &=& 3(u^2 - (1+v^2), -2uv, 2u) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &=& 3(-2uv, v^2 - (1+u^2), -2v) \end{array}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{array}{rclcl} E(u,v) &=& 9\{(u^2 - (1+v^2))^2 + 4u^2(1+v^2)\} &=& 9(1+u^2+v^2)^2 \\ G(u,v) &=& 9\{(v^2 - (1+u^2))^2 + 4v^2(1+u^2)\} &=& 9(1+u^2+v^2)^2 \\ F(u,v) &=& 9\{-2uv(u^2 - v^2 - 1 + v^2 - u^2 - 1) - 4uv\} &=& 0 \end{array}$$

što pokazuje da $E = G$ i $F \equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

Kako bismo provjerili da je $\mathbf{x}$ minimalno mi izračunamo

$$\Delta \mathbf{x}(u,v) = 6(u, -v, 1) + 6(-u, v, -1) = (0,0,0)$$

tako da je $\mathbf{x}$ minimalna, jer je konformalna i harmonična.

Zadatak 8.3. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ konformalno parametrizovana minimalna površ. Pokažite da se njena druga fundamentalna forma može napisati kao $\mathrm{I\!I} = \mathrm{Re}\{(e - if)(du + idv)^2\}$ i da je $(e^\alpha - if^\alpha) = e^{i\alpha}(e - if)$ za površi $\mathbf{x}^\alpha$ asocijativne porodice od $\mathbf{x}$.

Zaključite da asimptotske linije i linije krivine od $\mathbf{x}$ postaju asimptotske linije i linije krivine na $\mathbf{x}^*$, respektivno.

Rješenje. Kako je $\mathbf{x}$ konformalna $\mathrm{S} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ tako da $H = 0$ implicira $g = -e$ i dobivamo

$$\mathbb{I} = e\,(du^2 - dv^2) + 2f\,dudv = \mathrm{Re}\{(e - if)(du + idv)^2\}.$$

Primjetite da, kako su sve $\mathbf{x}^\alpha$ minimalne i konformalne sa $\mathbf{N}^\alpha = \mathbf{N}$, mi samo trebamo da izračunamo e^α i f^α kako bismo odredili prvu i drugu fundamentalnu formu od $\mathbf{x}^\alpha$. Stoga računamo,

$$\begin{aligned} e^\alpha &= -\mathbf{x}^\alpha_u \cdot \mathbf{N}^\alpha_u = -\cos\alpha\,\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u - \sin\alpha\,\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u = \cos\alpha\,e + \sin\alpha\,f \\ f^\alpha &= -\mathbf{x}^\alpha_u \cdot \mathbf{N}^\alpha_v = -\cos\alpha\,\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v - \sin\alpha\,\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v = \cos\alpha\,f - \sin\alpha\,e \end{aligned}$$

jer je $\mathbf{N} \times \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v$ i $\mathbf{N} \times \mathbf{x}_v = -\mathbf{x}_u$. Stoga $(e^\alpha - if^\alpha) = e^{i\alpha}(e - if)$.

Konkretno, imamo $\mathbb{I} = e\,(du^2 - dv^2) + 2f\,dudv$ i $\mathbb{I}^* = f(du^2 - dv^2) - 2e\,dudv$ tako da jedačine asimptotskih linija i linija krivine na $\mathbf{x}^*$ postaju

$$\begin{aligned} 0 &= e^*(u'^2 - v'^2) + 2f^*u'v' &&= f\,(u'^2 - v'^2) - 2e\,u'v', \\ 0 &= f^*(u'^2 - v'^2) - 2e^*u'v' &&= -\{e\,(u'^2 - v'^2) + 2f\,u'v'\}. \end{aligned}$$

Stoga jednačine asimptotskih linija i linija krivine mijenjaju uloge na konjugovanoj površi.

Zadatak 8.4. Pretpostavimo da površ bez pupčanih tačaka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ ima konstantnu srednju krivinu $H \neq 0$. Dokažite da $(u, v) \mapsto \mathbf{x}^*(u, v) := \mathbf{x}(u, v) + \frac{1}{H}\mathbf{N}(u, v)$ ima konformalno ekvivalentnu metriku $\mathrm{I}^* = \frac{H^2 - K}{H^2}\,\mathrm{I}$ i konstantnu srednju krivinu $H^* = H$.

Rješenje. Moramo izračunati prvu fundamentalnu formu paralelne površi $\mathbf{x}^*$: jer je $H \equiv const$ nalazimo

$$\mathrm{I}^* = |d\mathbf{x} + \tfrac{1}{H}\,d\mathbf{N}|^2 = |d\mathbf{x}|^2 + \tfrac{2}{H}\,d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N} + \tfrac{1}{H^2}\,|d\mathbf{N}|^2 = \mathrm{I} - \tfrac{2}{H}\,\mathbb{I} + \tfrac{1}{H^2}\{2H\,\mathbb{I} - K\,\mathrm{I}\} = \tfrac{H^2 - K}{H^2}\,\mathrm{I}$$

kako je i traženo. Kako bismo izračunali srednju krivinu H^* primjetite da

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*_u &= \mathbf{x}_u + \tfrac{1}{H}\,\mathbf{N}_u &&= (1 - \tfrac{1}{H}\mathrm{S}_{11})\,\mathbf{x}_u - \tfrac{1}{H}\mathrm{S}_{21}\,\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{x}^*_v &= \mathbf{x}_v + \tfrac{1}{H}\,\mathbf{N}_v &&= (1 - \tfrac{1}{H}\mathrm{S}_{12})\,\mathbf{x}_u - \tfrac{1}{H}\mathrm{S}_{22}\,\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

gdje S_{ij} označavaju komponente operatora oblika. Stoga,

$$\mathbf{x}^*_u \times \mathbf{x}^*_v = (1 - \tfrac{2H}{H} + \tfrac{K}{H^2})\,\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = -\tfrac{H^2 - K}{H^2}\,\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

tako da je $\mathbf{N}^* = -\mathbf{N}$ jer je $H^2, H^2 - K > 0$. Konzekventno,

$$\mathbb{I}^* = d\mathbf{x}^* \cdot d\mathbf{N} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N} + \tfrac{1}{H}\,|d\mathbf{N}|^2 = -\mathbb{I} + \tfrac{1}{H}(2H\,\mathbb{I} - K\,\mathrm{I}) = \mathbb{I} - \tfrac{K}{H}\,\mathrm{I}$$

i operator oblika

$$\mathrm{S}^* = \tfrac{H^2}{H^2 - K}\{\mathrm{S} - \tfrac{K}{H}\,id\}$$

tako da $H^* = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{S}^* = \frac{H^2}{H^2 - K}\,\frac{H^2 - K}{H} = H$.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 9

(*Površi: fundamentalne jednačine*)

Predati rješenja na kraju predavanja u srijedu 9tog januara 2008.

Zadatak 9.1. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gauss - ovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka generalnosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ. Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,(du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.)

Rješenje. Iz Codazzijevih jednačina

$$E_v = -2E\tfrac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1 - \kappa_2} = -2E\varphi_v \tan\varphi \quad \text{i} \quad G_u = 2G\tfrac{(\kappa_2)_u}{\kappa_1 - \kappa_2} = 2G\varphi_u \cot\varphi$$

tako da

$$(\tfrac{E}{\cos^2\varphi})_v = \tfrac{1}{\cos^2\varphi}\{E_v + 2E\varphi_v\tan\varphi\} = 0, \quad \text{i} \quad (\tfrac{G}{\sin^2\varphi})_u = \tfrac{1}{\sin^2\varphi}\{G_u - 2G\varphi_u\cot\varphi\} = 0.$$

Kao posljedica ovoga, možemo riješiti diferencijalne jednačine

$$u' = \tfrac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}(u) \quad \text{and} \quad v' = \tfrac{\sin\varphi}{\sqrt{G}}(v)$$

sa dvije funkcije $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$ jedne promjenjljive kako bismo dobili, za $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{x}(u(\tilde{u}), v(\tilde{v}))$:

$$\tilde{\mathrm{I}} = (Eu'^2)\, d\tilde{u}^2 + (Gv'^2)\, d\tilde{v}^2 = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2$$

i

$$\tilde{\mathrm{II}} = \kappa_1\cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \kappa_2\sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 = \sin\varphi\cos\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\}.$$

Zadatak 9.2. Pokažite da je Gaussova krivina konformalno paramterizovane površi data sa

$$K = -\tfrac{1}{2E}\Delta\ln E.$$

Rješenje. Vraćajući se dokazu Gaussove Theoreme egregium nalazimo

$$\begin{aligned}
K &= \tfrac{|(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uu})^t(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{vv})| - |(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv})^t(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv})|}{(EG-F^2)^2} \\
&= \tfrac{1}{E^4}\left\{\begin{vmatrix} E & 0 & -\frac{E_u}{2} \\ 0 & E & \frac{E_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & -\frac{E_v}{2} & \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & 0 & \frac{E_v}{2} \\ 0 & E & \frac{E_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} \end{vmatrix}\right\} \\
&= -\tfrac{1}{2E}\left\{\tfrac{E_{uu}+E_{vv}}{E} - \tfrac{E_u^2+E_v^2}{E^2}\right\} \quad = \quad -\tfrac{1}{2E}\Delta\ln E.
\end{aligned}$$

Zadatak 9.3. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine minimalne površi. Pokažite da $E^2K \equiv const$ i zaključite da $\ln E$ mora zadovoljavati Liouvilleovu jednačinu,

$$\Delta\ln E = const\, e^{-\ln E}.$$

Rješenje. Koristimo Codazzijeve jednačine, koristeći $K = -\kappa_1^2 = -\kappa_2^2$, kako bismo našli

$$\begin{aligned}
(E^2K)_u &= 2EE_uK + E^2K_u &= 2EE_uK - E^2(\kappa_2^2)_u &= 2EE_uK - EE_u(\kappa_1\kappa_2 - \kappa_2^2) &= 0, \\
(E^2K)_v &= 2EE_vK + E^2K_v &= 2EE_vK - E^2(\kappa_1^2)_v &= 2EE_vK + EE_v(\kappa_1^2 - \kappa_1\kappa_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Stoga $E^2K \equiv const$ i, iz Gaussove jednačine $K = -\frac{1}{2E}\Delta\ln E$ za konformalno parametrizovanu površ, zaključujemo

$$const \equiv \tfrac{1}{2}E^2K = -E\Delta\ln E = e^{\ln E}\Delta\ln E.$$

Zadatak 9.4. Pokažite da je Gaussova krivina površi invarijantna pod reparamterizacijom i zaključite da Gaussova krivina nestaje ako je površ (lokalno) izometrična ravni, tj., prima izometričnu para – metrizaciju.

Rješenje. Gaussova krivina parametrizovane površi je data sa

$$K \quad = \quad \frac{|\mathbf{N},\mathbf{N}_u,\mathbf{N}_v|}{\sqrt{EG-F^2}} \quad = \quad \frac{\mathbf{N}\cdot(\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v)}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|}.$$

Sada, ako $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathbf{x}(u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v}))$ je reparametrizacija, onda

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \times \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}$$

tako da $\tilde{n} = \pm\mathbf{N}$, gdje je znak znak determinante $\begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}$, and

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\tilde{u}} \times \tilde{\mathbf{N}}_{\tilde{v}} = \mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}.$$

Stoga

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{\mathbf{N}}\cdot(\tilde{\mathbf{N}}_u\times\tilde{\mathbf{N}}_v)}{|\tilde{\mathbf{x}}_u\times\tilde{\mathbf{x}}_v|} = \pm\frac{\mathbf{N}\cdot(\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v)\begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|\ \left|\begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}\right|} = \frac{\mathbf{N}\cdot(\mathbf{N}_u\times\mathbf{N}_v)}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|} = K.$$

Sada, ako površ prima izometričnu paramterizaciju, onda je odgovoarajuća prva fundamentalna forma $\mathrm{I} = du^2 + dv^2$. To jest, prima konformalnu parametrizaciju sa $E \equiv 1$.

Stoga $K = -\frac{1}{2}\Delta \ln 1 = 0$.

Diferencijalna Geometrija: Vježbe 10

(*Površi: geodezije*)

Predati rješenja na kraju predavanja u nikad.

Zadatak 10.1. Pokažite da su prave linije na linijskoj površi geodezije.

Rješenje. Parametrišemo našu linijsku površ na uobičajeni način pomoću

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u),$$

gdje je γ regularna kriva i η je jedinično vektorsko polje duž krive. Za prave linije $v \mapsto \alpha(v) = \mathbf{x}(u,v)$ na površi imamo $\alpha'' = \mathbf{x}_{vv} = 0$ tako da, očito, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\alpha' = 0$ i α je geodezija.

Zadatak 10.2. Nadjite geodezije na ravni $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$.

Rješenje. Parametrišimo ravan sa $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = P + u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2$, gdje je P neka tačka na ravni i $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je ortonormalna baza. Onda $\mathrm{I} = du^2 + dv^2$ tako da jednačine za geodeziju imaju oblik $u'' = v'' = 0$ i shvatamo da je geodezija na $\mathcal{E}$ prava linija

$$t \mapsto \gamma(t) = P + (at+b)\,\mathbf{e}_1 + (ct+d)\,\mathbf{e}_2,$$

gdje $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sa $a^2 + c^2 \neq 0$.

Zadatak 10.3. Neka je $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ cilindar na krivoj u (x,y)-ravni. Dokažite da je geodezija na Σ (opšti) heliks.

Rješenje. Parametrišemo cilindar sa $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v)$, gdje $x'^2 + y'^2 = 1$ bez gubitka generalnosti, i stoga $\mathrm{I} = du^2 + dv^2$. Posljedično, $\Gamma^k_{ij} = 0$ i jednačine za geodeziju imaju oblik $u'' = v'' = 0$ tako da $u(t) = at + b$, $v(t) = ct + d$ sa $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Stoga, geodezija je oblika

$$t \mapsto \gamma(t) = (x(at+b), y(at+b), ct+d)$$

i, sa $\mathbf{e} = (0,0,1)$, nalazimo da

$$T \cdot \mathbf{e} = \tfrac{1}{|\gamma'|}\gamma' \cdot \mathbf{e} = \tfrac{c}{a^2+c^2} \equiv const.$$

Stoga je γ opšti heliks.

Zadatak 10.4. Parametrišite $S^2(R) = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ pomoću geodezijskih polarnih koordinata oko $P = (0,0,R)$.

Rješenje. Koristimo $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ kao bazu za tangentnu ravan; onda

$$r \mapsto \gamma_\theta(r) := R\,(\sin\frac{r}{R}\cos\theta, \sin\frac{r}{R}\sin\theta, \cos\frac{r}{R})$$

definiše geodeziju na $S^2(R)$ sa $\gamma_\theta(0) = (0,0,R)$ i $\gamma'_\theta(0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ jer

$$\gamma''_\theta = -\tfrac{1}{R^2}\gamma_\theta$$

je okomita na sferu u svakoj tački γ_θ. Stoga je željena parametrizacija geodezijskim polarnim koordinatama (r,θ)

$$(r,\theta) \mapsto \gamma_\theta(r) = R\,(\sin\frac{r}{R}\cos\theta, \sin\frac{r}{R}\sin\theta, \cos\frac{r}{R}).$$

Diferencijalna Geometrija: Test 1 14/11/2011

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1.

(a) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = \left(\frac{t+\sin t}{2}, \frac{-t+\sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive α. [8]

(ii) Neka je $t \mapsto \beta(t)$ druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva α. Kakav je odnos izmedju α i β? [2]

(b) Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t. [5]

(c) Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive. [5]

Rješenje.

(a)

(i) Prvo parametrišimo α dužinom luka.

$$\alpha'(t) = ((1+\cos t)/2, (-1+\cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2}),$$

pa je $|\alpha'| = 1$, pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = (-\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = \left(\frac{1+\cos t}{2}, \frac{-1+\cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$N = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t\right),$$

$$B = T \times N = \left(\frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = \left(\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}\right) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Po Fundamentalnoj teoremi za prostorne krive, β je jednaka α do rigidnog kretanja.

(b) Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t. Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom. Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$. Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

(c) Neka je $\gamma(t) := e^t(\cos t, \sin t)$; Onda $|\gamma'(t)|^2 = 2e^{2t}$ i ako izračunamo dužinu luka od $t = 0$,

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)|\,dt = \sqrt{2}(e^t - 1) \quad \Leftrightarrow \quad t(s) = \ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}).$$

Stoga je

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = (1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}})\,(\cos\ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}), \sin\ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}))$$

reparametrizacija dužinom luka krive γ.

Sada, njena krivina je, do znaka, data sa

$$\kappa^2(s) = |\tilde{T}'(s)|^2 = |\tilde{\gamma}''(s)|^2 = \tfrac{1}{(\sqrt{2}+s)^2} = \tfrac{1}{2e^{2t}}.$$

Zadatak 2. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [6]

(c) Kada kažemo da se $t \mapsto F(t) \in SO(3)$ zove prilagodjeni okvir za regularnu krivu $t \mapsto \gamma(t)$? [3]

(d) Nadjite paralelni prilagodjeni okvir za kružni heliks. [8]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Kako je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $t \mapsto F(t) \in SO(3)$ se zove <u>(prilagodjeni) okvir</u> za regularnu krivu $t \mapsto \gamma(t)$ ako

$$T(t) = F(t)e_1 = \tfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

(d) Parametrizacija je data sa $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)$; Onda

$$\begin{array}{rclcr} T(t) & = & \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} & = & \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\,(-r\sin t, r\cos t, h) \\ N(t) & = & \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|} & = & -(\cos t, \sin t, 0) \\ B(t) & = & T(t) \times N(t) & = & \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\,(h\sin t, -h\cos t, r) \end{array}$$

daje prilagodjeni okvir. Tražimo paralelno normalno polje

$$N_1(t) = -\cos\varphi(t)\,N(t) + \sin\varphi(t)\,B(t);$$

stoga izračunamo

$$\begin{array}{rclcr} \nabla^\perp N & = & N' - (N' \cdot T)\,T & = & \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\,B \\ \nabla^\perp B & = & B' - (B' \cdot T)\,T & = & -\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\,N \end{array}$$

i

$$0 \overset{!}{=} \nabla^\perp N_1 = \{\varphi' - \tfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\}\,\{\sin\varphi\,N + \cos\varphi\,B\}.$$

Stoga $F = (T, N_1, N_2)$ sa

$$\begin{array}{rcl} N_1(t) & := & -\cos\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,N(t) + \sin\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,B(t) \\ N_2(t) & := & (T \times N_1)(t) = -\sin\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,N(t) - \cos\frac{ht}{\sqrt{r^2+h^2}}\,B(t) \end{array}$$

daje paralelni okvir za γ.

Primjetite da svaki drugi paralelni okvir se dobija konstantnom rotacijom datog: ovo se ogleda u konstantnoj integraciji za ϕ.

Diferencijalna Geometrija: Test 2 23/12/2011

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a) (i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu formu površi σ. [1]

(ii) Napišite formule za Gaussovu krivinu K i srednju krivinu H pomoću koeficijenata prve i druge fundamentalne forme površi σ. [2]

(iii) Definišite Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u, v)$ površi σ. [2]

(b) (i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$ paralelni vektori za sva u, v. [2]

(ii) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K\sigma_u \times \sigma_n$$

[Pomoć: Sjetite se Lagrangeovog identiteta $(a \times b).(c \times d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$] [4]

(c) Koristeći se Gaussovim preslikavanjem (ili drugačije) pokažite da Möbiusova traka nije orijentabilna. [4]

(d) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi parametrizirane sa $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. [5]

(e)

(i) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [2]

(ii) Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. [5]

(f)

(i) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ?* [1]

(iii) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u, v) \mapsto (u^3 - 3u(1 + v^2), v^3 - 3v(1 + u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]

(g) Neka je $(u, v) \mapsto \xi(u, v)$ tangencijalno vektorsko polje duž parametrizovane površi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u, v) u pravcu (λ, μ) ovog vektorskog polja. [2]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [2]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.
$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v$.

(ii)

$$H = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

(iii) Linija $t \mapsto \mathbf{x}(u,v) + t\,(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u,v)$ se zove normalnom linijom površi $\mathbf{x}$ u $\mathbf{x}(u,v)$; jedinično normalno vektorsko polje

$$\mathbf{n} = \tfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \tfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

se zove normalom ili Gaussovim preslikavanjem od $\mathbf{x}$.

(b)

(i) $\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) = \mathbf{n}_u(\mathbf{n}.\mathbf{n}_v) - \mathbf{n}_v(\mathbf{n}.\mathbf{n}_u) = 0 - 0 = 0$, pa su vektori paralelni.

(ii)

(c) Posmatrajmo Möbiusovu traku

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := ((r + v\cos\tfrac{u}{2})\cos u, (r + v\cos\tfrac{u}{2})\sin u, v\sin\tfrac{u}{2}).$$

Ovdje

$$\mathbf{x}_u(u,0) = r\,(-\sin u, \cos u, 0)$$
$$\mathbf{x}_v(u,0) = (\cos\tfrac{u}{2}\cos u, \cos\tfrac{u}{2}\sin u, \sin\tfrac{u}{2})$$

i

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v(u,0) = r\,(\sin\tfrac{u}{2}\cos u, \sin\tfrac{u}{2}\sin u, -\cos\tfrac{u}{2})$$

i $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v(u,0)| \equiv r$ tako da

$$N(u,0) = (\sin\tfrac{u}{2}\cos u, \sin\tfrac{u}{2}\sin u, -\cos\tfrac{u}{2}).$$

Konkretno, $N(0,0) = (0,0,-1)$ i $N(2\pi,0) = (0,0,1)$ iako je $\mathbf{x}(2\pi,0) = \mathbf{x}(0,0)$: jednična normala se okreće kada idemo oko Möbiusove trake jednom — Möbiusova traka *nije* orijentabilna.

(d) Imamo da je

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{x}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1).$$

Stoga je Gaussovo preslikavanje je onda

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = (\sin v, -\cos v, u)/\sqrt{1+u^2}$$

(primjetiti - negacija ovog izraza je tadjor validan odgovor za $\mathbf{n}$). Koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = 1, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = u^2 + 1.$$

Kako je

$$\mathbf{x}_{uu} = 0, \quad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$

koeficijenti druge fundamentalne forme su

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad f = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} = -1/\sqrt{1+u^2}, \quad g = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Stoga je operator oblika

$$S = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1+u^2} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(napomena - negacija je takodjer tačan odgovor zavisno od znaka $\mathbf{n}$), pa je stoga Gaussova krivina

$$K = \det S = -\frac{1}{(1+u^2)^2},$$

a srednja krivina

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S = 0.$$

(e)

(i) Površ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se zove linijska površ ako prima (lokalno) parametrizaciju $\mathbf{x}$ forme

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u),$$

gdje je $u \mapsto \gamma(u)$ regularlna kriva u $\mathbb{R}^3$ i $u \mapsto \eta(u) \in S^2$ jedinično vektorsko polje duž γ.

Razvojna površ je linijska površ $(u,v) \mapsto \gamma(u) + v\,\eta(u)$ čije je Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{n}(u)$ jedino zavisno o u, tj.,

$$\mathbf{n}_v \equiv 0.$$

(ii) Prateći primjer iz sekcije 2.4, linija $y = 1$, $z = x$ leži na Σ: parametrišemo liniju pomoću $v \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}}v, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}v)$; kako bismo vidjeli da je jednačina koja definiše Σ zadovoljena,

$$\frac{1}{2}v^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}v^2.$$

Takodje, znamo da je površ površ revolucije (jer je 0-ti nivo funkcije $F(x,y,z) = (x^2+y^2) - z^2$, čija je zavisnost o x i y jedino u obliku x^2+y^2, tj., udaljenost tačke od z-ose) oko z-ose. Odavdje dobivamo parametrizaciju površi rotirajući gornju liniju oko z-ose:

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je Σ linijska površ sa $\gamma(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, 1)$.

(f)

(i) $F = 0$ i $E = G$.

(ii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

(iii) Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= 3(u^2 - (1+v^2), -2uv, 2u) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= 3(-2uv, v^2 - (1+u^2), -2v) \end{aligned}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{aligned} E(u,v) &= 9\{(u^2 - (1+v^2))^2 + 4u^2(1+v^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2 \\ G(u,v) &= 9\{(v^2 - (1+u^2))^2 + 4v^2(1+u^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2 \\ F(u,v) &= 9\{-2uv(u^2 - v^2 - 1 + v^2 - u^2 - 1) - 4uv\} &&= 0 \end{aligned}$$

što pokazuje da $E = G$ i $F \equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

Kako bismo provjerili da je $\mathbf{x}$ minimalno mi izračunamo

$$\Delta\mathbf{x}(u,v) = 6(u,-v,1) + 6(-u,v,-1) = (0,0,0)$$

tako da je $\mathbf{x}$ minimalna, jer je konformalna i harmonična.

(g) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalni vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$; njegov kovarijantni izvod u (u,v) u pravcu (λ,μ) je

$$(\nabla_{(\lambda,\mu)}\xi)|_{(u,v)} := \{(\lambda\xi_u + \mu\xi_v) - ((\lambda\xi_u + \mu\xi_v)\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}\}(u,v).$$

∇ se takodjer zove Levi-Civita konekcija. Koeficijenti Γ_{ij}^k u

$$\nabla_j(\partial_i\mathbf{x}) := \partial_j\partial_i\mathbf{x} - (\partial_j\partial_i\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \textstyle\sum_k \Gamma_{ij}^k\,\partial_k\mathbf{x}$$

se zovu Christoffelovi simboli.

$$\begin{aligned} \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_u &=: \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_u =: \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_v; \\ \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_v &=: \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_v =: \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita i Test 1 06/12/2010

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta. Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2 + y^2) = 1 + z^2, z = 2x + 1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu; [2]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [4]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [2]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

(c) Nadjite krivinu (do znaka) i torziju krive date u (a). [5]

(d) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara − metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(**Pomoć**: Razmislite o koeficijentima koje trebate prije računanja!) [5]

Rješenje.

(a)

(i) Uzmimo $F_1(x, y, z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x, y, z) := 2x - z + 1$;
Onda $\nabla F_1(x, y, z) \times \nabla F_2(x, y, z) = -4(2y, z - 2x, 4y) = -4(2y, 1, 4y) \neq 0$ jer je $z = 2x + 1$;
stoga su $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$.
Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

(ii) Posmatrajmo $0 = F_1(x, y, 2x + 1) = 4y^2 - 4x - 2$, što daje $x = y^2 - \frac{1}{2}$;
stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t^2 - \frac{1}{2}, t, 2t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t) \neq 0, \forall t$.

(b)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2|\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(c) Računamo $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t)$ i $\gamma''(t) = (2, 0, 4)$ tako da $\kappa = \frac{|(4,0,-2)|}{|(2t,1,4t)|^3} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1+20t^2}^3}$; jer je γ planarna kriva, $\tau = 0$.

(d) Računamo

$$\tilde{\gamma}'(s) = t'(s)\gamma(t(s))$$
$$\tilde{\gamma}''(s) = t'^2(s)\gamma''(t(s)) + ?\gamma'(t(s))$$

tako da je $\frac{|\tilde{\gamma}'\times\tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma'(t(s))\times\gamma''(t(s))|^2 t'^{(2\cdot 3)}(s)}{|\gamma'(t(s))|^6 t'^6(s)} = \frac{|\gamma'\times\gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t(s))$.

Zadatak 2. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [7]

(c) Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju. [10]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Kako je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T\cdot T' & T\cdot N' & T\cdot B' \\ N\cdot T' & N\cdot N' & N\cdot B' \\ B\cdot T' & B\cdot N' & B\cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T\cdot N' & T\cdot B' \\ N\cdot T' & 0 & N\cdot B' \\ B\cdot T' & B\cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Očito, $\tilde{F} = FA$ će biti još jedan prilagodjeni okvir, jer sa gornjim oblikom A, $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$ i A ima vrijednosti u $SO(3)$ tako da je $\tilde{F}$, sa F, s vrijednostima u $SO(3)$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da je kriva paramtetrizovana dužinom luka, tj. $|\gamma'| \equiv 1$.

Sada izračunamo $\tilde{\Phi} = \tilde{F}^t\tilde{F}' = A^tF^t(F'A + FA') = A^t\Phi A + A^tA'$ tako da

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1\cos\varphi - \kappa_2\sin\varphi & \kappa_1\sin\varphi - \kappa_2\cos\varphi \\ \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi & 0 & -(\tau + \varphi') \\ -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi & \tau + \varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

gdje κ_i i τ su krivine i torzija koje dolaze iz Φ. Stoga:

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi,\\ \tilde{\kappa}_2 &= -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi,\\ \tilde{\tau} &= \tau + \varphi'.\end{aligned}$$

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u,v)\mapsto \mathbf{x}(u,v)\in\mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta su *prva i druga fundamentalna forma* I i II površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(iii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

(b) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u,v)\mapsto(u^3-3u(1+v^2),v^3-3v(1+u^2),3(u^2-v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]

(c) Izračunajte drugu fundamentalnu formu helikoida. [8]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I}=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ sa $E=|\mathbf{x}_u|^2$, $F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v$ i $G=|x_v|^2$.
$\mathrm{II}=edu^2+2fdudv+gdv^2$ sa $e=-\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{N}_u$, $f=-\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{N}_v$ i $g=-\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{N}_v$.

(ii) $F=0$ i $E=G$.

(iii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

(b) Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v) &= 3(u^2-(1+v^2),-2uv,2u)\\ \mathbf{x}_v(u,v) &= 3(-2uv,v^2-(1+u^2),-2v)\end{aligned}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{aligned}E(u,v) &= 9\{(u^2-(1+v^2))^2+4u^2(1+v^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2\\ G(u,v) &= 9\{(v^2-(1+u^2))^2+4v^2(1+u^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2\\ F(u,v) &= 9\{-2uv(u^2-v^2-1+v^2-u^2-1)-4uv\} &&= 0\end{aligned}$$

što pokazuje da $E=G$ i $F\equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

Kako bismo provjerili da je $\mathbf{x}$ minimalno mi izračunamo

$$\Delta\mathbf{x}(u,v)=6(u,-v,1)+6(-u,v,-1)=(0,0,0)$$

tako da je $\mathbf{x}$ minimalna, jer je konformalna i harmonična.

(c) Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u,v)\mapsto\mathbf{x}(u,v)=(\sinh u\cos v,\sinh u\sin v,v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)}=\cosh^2 u\,\{du^2+dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u,v)=\cosh u\,(\cos v,\sin v,0)\quad \text{i}\quad \mathbf{x}_v(u,v)=(-\sinh u\sin v,\sinh u\cos v,1)$$

tako da (vidi Problem 5.4)

$$\mathbf{N}(u,v)=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{E}\,(u,v)=\left(\frac{\sin v}{\cosh u},-\frac{\cos v}{\cosh u},\tanh u\right)$$

i

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u,v) &= \sinh u\,(\cos v,\sin v,0)\\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) &= \cosh u\,(-\sin v,\cos v,0)\\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) &= -\sinh u\,(\cos v,\sin v,0)\end{aligned}$$

tako da

$$e(u,v)=0,\quad f(u,v)=-1\quad\text{i}\quad g(u,v)=0$$

i stoga, $\mathrm{II}|_{(u,v)}=-2\,dudv$.

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 21/01/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Možete uraditi sva pitanja, no ocjena će se dodijeliti za NAJBOLJA 3 odgovora na 4 ponudjena zadatka.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [2]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [3]

(b) Formulišite *Frenetove jednačine.* [4]

(c) Dokažite da Frenetove jednačine vrijede. [5]

(d) Pretpostavimo da sve rektifirajuće ravni $\{P \in \mathbb{R}^3 | (P - \gamma(s)) \cdot N(s) = 0\}$ krive γ prolaze kroz (fiksnu) tačku $P_0 \in \mathbb{R}^3$. Pokažite da postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $(a - s)\kappa(s) = b\tau(s)$, gdje su κ i τ krivina i torzija krive γ. [6]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases} .$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

(c) Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Možemo napisati $P_0 = \gamma + \alpha T + \beta B$ sa odgovarajućim funkcijama $s \mapsto \alpha(s), \beta(s) \in \mathbb{R}$; uzimajući izvod nalazimo, jer su T, N i B linearno nezavisni,

$$0 = (1 + \alpha')T + (\alpha\kappa - \beta\tau)N + \beta' B \iff 0 \equiv 1 + \alpha' = \beta' = \alpha\kappa - \beta\tau.$$

Konkretno, imamo $a, b \in \mathbb{R}$ takve da: $\beta \equiv b, \alpha(s) = a - s$;
onda: $0 = \alpha(s)\kappa(s) - \beta(s)\tau(s) = (a-s)\kappa(s) = b\tau(s)$

Zadatak 2. Neka je $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2+y^2) = 1 + z^2, z = 2x+1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu tako što ćete pokazati da su gradijenti $\nabla F_1(x,y,z)$ i $\nabla F_2(x,y,z)$ linearno nezavisni za sva $(x,y,z) \in C$; [3]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [6]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [3]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [3]

(c) Nadjite krivinu (do znaka) i torziju krive date u (a). [5]

Rješenje.

(a)

(i) Uzmimo $F_1(x,y,z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x,y,z) := 2x - z + 1$;
Onda $\nabla F_1(x,y,z) \times \nabla F_2(x,y,z) = -4(2y, z-2x, 4y) = -4(2y, 1, 4y) \neq 0$ jer je $z = 2x+1$;
stoga su $\nabla F_1(x,y,z)$ i $\nabla F_2(x,y,z)$ linearno nezavisni za sva $(x,y,z) \in C$.
Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

(ii) Posmatrajmo $0 = F_1(x,y,2x+1) = 4y^2 - 4x - 2$, što daje $x = y^2 - \frac{1}{2}$;
stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t^2 - \frac{1}{2}, t, 2t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t) \neq 0, \forall t$.

(b)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2 |\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(c) Računamo $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t)$ i $\gamma''(t) = (2, 0, 4)$ tako da $\kappa = \frac{|(4,0,-2)|}{|(2t,1,4t)|^3} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{1+20t^2}^3}$; jer je γ planarna kriva, $\tau = 0$.

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [2]

(b)

(i) Neka $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [6]

(ii) Nadjite konformalnu parametrizaciju $\mathbf{x}$ površi

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

[6]

(c) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ, kao u (a).

(i) Šta je *druga fundamentalna forma* $\mathbb{II}$ površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b)

(i) Ovdje

$$E(u, v) = |(r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, h'(u))|^2 = r'^2(u) + h'^2(u)$$

$$F(u, v) = (r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, h'(u)) \cdot (-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0) = 0$$

$$G(u, v) = |(-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0)|^2 = r^2(u)$$

tako da je površ konformalna ako i samo ako $r'^2 + h'^2 = r^2$.

(ii) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2} = r(u)$; stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u) \sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u, v) \mapsto \sigma(u, v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.

(c)

(i) $\mathbb{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}$ nestaje.

Zadatak 4.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. [2]

(b) Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(c)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [3]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [5]

(d) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom. [5]

Rješenje.

(a) Normalno polje N duž γ je paralelno ako $\nabla^{\perp}N = N' - (N' \cdot T)T \equiv 0$.

(b) Koristimo $T \perp N$:
ako je N paralelno onda $(|N|^2)' = 2N \cdot N' = 2N \cdot \nabla^{\perp}N \equiv 0$, tj. $|N| \equiv const$;
ako su N_1 i N_2 paralelni onda $(N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = \nabla^{\perp}N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^{\perp}N_2 = 0$;
Stoga $\cos\alpha = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} \equiv const$ kada α oznaqv cava ugao izmedju N_1 i N_2.

(c)

(i) Rodriguesova jednačina: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

(ii) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^{\perp}N + (\kappa + \frac{N' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^{\perp}N \equiv 0$.
Ako je $\nabla^{\perp}N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(d) Ako je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_i$ onda je $N_i(u) = \mathbf{N}_i(u, 0)$ paralelno duž γ po (c);
stoga, ako je γ linija krivine za obje površi, onda su N_1 i N_2 paralelna normalna polja duž γ, te stoga čine konstantan ugao, po (b).

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 07/04/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Definišite *jedinično tangentno vektorsko polje* T i *krivinu* κ. [2]

(b) Pokažite da je krivina identično jednaka nuli ako i samo ako slika krive γ leži na pravoj. [5]

(c) Definišite *principalno normalno vektorsko polje* N, *binormalu* B i *torziju* τ. Navedite i dokažite *Frenet-Serret formule* za γ. [5]

(d) Pokažite da je odnos τ/κ konstantan ako i samo ako postoji konstantni jedinični vektor u koji čini konstantan ugao θ sa tangentnim vektorskim poljem T, tj. $T \cdot u = \cos\theta$. Kako se u ovom slučaju zove kriva γ? [8]

Rješenje.

(a) Ako je $\gamma \mapsto \gamma(s)$ parametrizovana dužinom luka, onda

- $T(s) := \gamma'(s)$ definiše jedinično tangentno vektorsko polje i
- $0 = 1' = (T \cdot T)'(s) = T(s) \cdot T'(s)$ tako da $T'(s) \parallel N(s)$ i N može biti definisano normalizacijom T' sve dok T' nije nestalo.

Onda se $K(s) := T'(s)$ zove vektorsko polje krivine krive γ i

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s) = K(s) \cdot N(s)$$

se zove njenom krivinom.

(b) Ako je $\gamma(s) = p + qs$, $p, q \in R^3$, $|q| = 1$, onda je $T(s) = q$ konstantno i $T'(s) = 0$, pa je stoga $\kappa(s) = 0$.

Obratno, ako je $\kappa(s) = 0$, onda je T konstatno, $T(s) = q$ recimo. Integrirajući $\gamma'(s) = q$, dobivamo $\gamma(s) = p + qs$, gdje je $p = \gamma(0)$.

(c) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}.$$

Vektorsko polje $B := T \times N$ zovemo binormalno (vektorsko polje) krive. Torzija je

$$\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s)).$$

Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Krivu $t \mapsto \gamma(t)$ zovemo <u>(opšti) heliks</u> ako njene tangente čine konstantan ugao sa fiksnim pravcem $a \in \mathbb{R}^3$ u prostoru, tj., $a \cdot T \equiv const.$

Pretpostavimo da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovan (opšti) heliks. Onda

$$0 = (a \cdot T)' = \kappa\, a \cdot N,$$

to jest, ako $\kappa \neq 0$, onda je a paralelno sa rektifirajućom ravni,

$$a = \lambda T + \mu B$$

sa pogodnim funkcijama λ i μ. Diferencirajući nalazimo da

$$0 = a' = \lambda' T + (\lambda\kappa - \mu\tau)\, N + \mu' B,$$

to jest, λ i μ su konstantne i odnos $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ je konstantan.

Obratno, ako $\frac{\tau}{\kappa} \equiv const$ za krivu $s \mapsto \gamma(s)$ biramo $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da

$$0 = \kappa \cos\alpha - \tau \sin\alpha$$

kako bismo dobili

$$(\cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B)' = (\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\, N \equiv 0.$$

To jest, $a := \cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B$ je konstantan pravac koji čini konstantan ugao α sa T jer je $a \cdot T \equiv \cos\alpha$.

Zadatak 2. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ regularna površ sa prvom i drugom fundamentalnom formom I i II.

(a) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(., \mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}., .)$. [5]

(b) Definišite precizno pojam *geodezije*. Dokažite da geodezija mora imati konstantnu brzinu. [5]

(c) Neka je površ $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ parametrizirana sa $\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u \sin v, v)$. Pokažite da je kriva $\beta(t) = \mathbf{x}(t,0)$ geodezija površi $\mathbf{x}$. [3]

(d) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi parametrizirane kao u (c). [7]

Rješenje.

(a) Ako napišemo fundamentalne forme u matričnoj formi,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spozaćemo da $\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(., S.)$ ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija S u odnosu na I prati direktno:

$$\mathrm{I}(\mathrm{S}., .) - \mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{S}^t\mathrm{I} - \mathrm{IS} = \mathrm{II}^t - \mathrm{II} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

(b) Neka je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ kriva i neka je $t \mapsto \xi(t)$ vektorsko polje duž γ tangentno na površ; neka je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \xi := \xi' - (\xi' \cdot N)\, N$$

će se zvati kovarijantni izvod od ξ duž krive.
Kriva se zove geodezijom ako

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \gamma' \equiv 0.$$

Očito

$$(|\gamma'|^2)' = 2\gamma' \cdot \gamma'' = 2\gamma' \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \gamma' + (\gamma'' \cdot N)\, N) = 0,$$

što pokazuje da $|\gamma'|^2 \equiv const.$

(c) $\beta(t) = (t, 0, 0)$, pa je $\beta''(t) = 0$, pa je stoga β geodezija.

(d) Imamo da je

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Stoga je Gaussovo preslikavanje je onda

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = (\sin v, -\cos v, u)/\sqrt{1+u^2}$$

(primjetiti - negacija ovog izraza je tadjor validan odgovor za $\mathbf{N}$). Koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = 1, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = u^2 + 1.$$

Kako je

$$\mathbf{x}_{uu} = 0, \quad \mathbf{x}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

koeficijenti druge fundamentalne forme su

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad f = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = -1/\sqrt{1+u^2}, \quad g = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = 0.$$

Stoga je operator oblika

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{1}{1+u^2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1+u^2} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ -\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(napomena - negacija je takodjer tačan odgovor zavisno od znaka $\mathbf{N}$), pa je stoga Gaussova krivina

$$K = \det S = -\frac{1}{(1+u^2)^2},$$

a srednja krivina

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S = 0.$$

Zadatak 3.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. [2]

(b) Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(c)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [3]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [5]

(d) Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom. [5]

Rješenje.

(a) Normalno polje N duž γ je paralelno ako $\nabla^\perp N = N' - (N' \cdot T)T \equiv 0$.

(b) Koristimo $T \perp N$:
ako je N paralelno onda $(|N|^2)' = 2N \cdot N' = 2N \cdot \nabla^\perp N \equiv 0$, tj. $|N| \equiv const$;
ako su N_1 i N_2 paralelni onda $(N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = \nabla^\perp N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^\perp N_2 = 0$;
Stoga $\cos\alpha = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} \equiv const$ kada α oznaqv cava ugao izmedju N_1 i N_2.

(c)

(i) Rodriguesova jednačina: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

(ii) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^\perp N + (\kappa + \frac{N' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^\perp N \equiv 0$.
Ako je $\nabla^\perp N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(d) Ako je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_i$ onda je $N_i(u) = \mathbf{N}_i(u,0)$ paralelno duž γ po (c);
stoga, ako je γ linija krivine za obje površi, onda su N_1 i N_2 paralelna normalna polja duž γ, te stoga čine konstantan ugao, po (b).

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 21/04/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [2]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite *Frenetove jednačine.* [3]

(c) Dokažite da Frenetove jednačine vrijede. [5]

(d) Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su κ i τ krivina i torzija krive γ. Definišimo "Darboux-ovo vektorsko polje"

$$\delta := N \times N' = \tau\, T + \kappa\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

[8]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

(c) Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Pretpostavimo da naš okvir $F = (T, N, B)$ zadovoljava Frenetove jednačine i neka je $\delta := N \times N'$; onda, prvo,

$$\delta = N \times (-\kappa T + \tau B) = \kappa B + \tau T$$

kako smo tvrdili jer F uzima vrijednosti u $SO(3)$; drugo,

$$\begin{array}{rclcl} T' - \delta \times T &=& \kappa N - (\tau T + \kappa B) \times T &=& 0, \\ N' - \delta \times N &=& -\kappa T + \tau B - (\tau T + \kappa B) \times N &=& 0, \\ B' - \delta \times B &=& -\tau N - (\tau T + \kappa B) \times B &=& 0. \end{array}$$

Stoga, Frenetove jednačine impliciraju jednačine $X' = \delta \times X$, gdje $X = T, N, B$.

S druge strane, pretpostavimo da je $s \mapsto F(s) = (T(s), N(s), B(s)) \in SO(3)$ okvir koji zadovoljava $X' = \delta \times X$ za $X = T, N, B$ sa $\delta := \tau T + \kappa B$. Onda, obrčući gornju pretpostavku, sobivamo

$$\begin{array}{rclcl} 0 &=& T' - \delta \times T &=& T' - \kappa N, \\ 0 &=& N' - \delta \times N &=& N' + \kappa T - \tau B, \\ 0 &=& B' - \delta \times B &=& B' + \tau N. \end{array}$$

Stoga, dobijamo Frenetove jednačine.

Zadatak 2.

(a) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = (\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive α. [8]

(ii) Neka je $t \mapsto \beta(t)$ druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva α. Kakav je odnos izmedju α i β? [2]

(b) Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t. [5]

(c) Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ funkcija i definišimo $\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(s) ds$. Provjerite da

$$\gamma(s) := (\int_{s_0}^{s} \cos \varphi(s) ds, \int_{s_0}^{s} \sin \varphi(s) ds, 0)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$. [5]

Rješenje.

(a)

(i) Prvo parametrišimo α dužinom luka.

$$\alpha'(t) = ((1 + \cos t)/2, (-1 + \cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2}),$$

pa je $|\alpha'| = 1$, pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = (-\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = (\frac{1 + \cos t}{2}, \frac{-1 + \cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}),$$

$$N = (\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t),$$

$$B = T \times N = \left(\frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = \left(\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}\right) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Po Fundamentalnoj teoremi za prostorne krive, β je jednaka α do rigidnog kretanja.

(b) Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t. Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom. Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$. Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

(c) Ovo je pravolinijski po diferencijaciji: imamo

$$\gamma' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

po FTPK, tako da je $|\gamma'| \equiv 1$ i γ je parametrizovana dužinom luka. Kako je (x, y)-ravan fiksna oskulatorna ravan za cijelu krivu možemo izabrati kao principalnu normalu,

$$N := (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

(ovo dobijemo $90°$ rotacijom iz $T = \gamma'$ u (x, y)-ravni u pozitivnom smislu); sa ovim izborom principalne normale

$$T' \cdot N = (-\varphi' \sin\varphi, \varphi' \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \varphi' = \kappa$$

i kriva ima krivinu κ (obrćući principalnu normalu bi rezultiralo u krivini $-\kappa$)

Zadatak 3. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ regularna površ.

(a)

(i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu I i II površi $\mathbf{x}$. [2]

(ii) Šta znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna*? [1]

(b) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(., \mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}., .)$. [4]

(c) Navedite i dokažite Gaussovu Theoremu Egregium, jasno navodeći sve druge rezultate koje koristite. [5]

(d)

(i) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]

(ii) Pokažite da je helikoid minimalna površ i odredite njegove asimptotske linije i linije krivine.

[6]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.

$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b) Ako napišemo fundamentalne forme u matričnoj formi,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spozaćemo da $\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(.,S.)$ ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija S u odnosu na I prati direktno:

$$\mathrm{I}(\mathrm{S}.,.) - \mathrm{I}(.,\mathrm{S}.) = \mathrm{S}^t\mathrm{I} - \mathrm{IS} = \mathrm{II}^t - \mathrm{II} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

(c) Gausova krivina K samo zavisi o I:

$$K = \textit{funkcija od } E,\, F,\, G \textit{ i njihovih izvoda.} \qquad (G)$$

Izračunaćemo

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \\ &= \frac{|\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uu}|\,|\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{vv}| - |\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv}|^2}{(EG-F^2)^2} \\ &= \frac{|(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uu})^t(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{vv})| - |(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv})^t(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_{uv})|}{(EG-F^2)^2} \\ &= \frac{(EG-F^2)(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv}) + (\text{I- i } \nabla\text{-stvari})}{(EG-F^2)^2} \end{aligned}$$

tako da K može, sa ∇, biti izračunato iz I po slijedećem rezultatu : $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu}$.

(d) Helikoid može biti parametrisan sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

sa prvom i drugom fundamentalnom formom

$$\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u\,\{du^2 + dv^2\} \quad \text{i} \quad \mathrm{II}|_{(u,v)} = -2\,dudv,$$

kako je izračunato ranije. Stoga

$$\mathrm{S}|_{(u,v)} = \frac{1}{\cosh^2 u} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

što očito ima $2H = \mathrm{tr}\,\mathrm{S} \equiv 0$.

Jednačine za linije krivine i asimptotske linije postaju

$$0 = (Ef - Fe)\,u'^2 + (Eg - Ge)\,u'v' + (Fg - Gf)\,v'^2 = \cosh^2 u\{-u'^2 + v'^2\}$$

i

$$0 = e\,u'^2 + 2f\,u'v' + g\,v'^2 = -2\,u'v',$$

respektivno. Stoga su asimptotske linije parametarske linije $u \equiv \mathit{const}$ i $v \equiv \mathit{const}$ i linije krivine su linije $u \pm v \equiv \mathit{const}$.

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 18/09/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [7]

(c) Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju. [10]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje:
$T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Kako je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Očito, $\tilde{F} = FA$ će biti još jedan prilagodjeni okvir, jer sa gornjim oblikom A, $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$ i A ima vrijednosti u $SO(3)$ tako da je $\tilde{F}$, sa F, s vrijednostima u $SO(3)$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da je kriva paramtetrizovana dužinom luka, tj. $|\gamma'| \equiv 1$.

Sada izračunamo $\tilde{\Phi} = \tilde{F}^t\tilde{F}' = A^tF^t(F'A + FA') = A^t\Phi A + A^tA'$ tako da

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_1\cos\varphi - \kappa_2\sin\varphi & \kappa_1\sin\varphi - \kappa_2\cos\varphi \\ \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi & 0 & -(\tau+\varphi') \\ -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi & \tau+\varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

gdje κ_i i τ su krivine i torzija koje dolaze iz Φ. Stoga:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\kappa}_1 & = & \kappa_1\cos\varphi + \kappa_2\sin\varphi, \\ \tilde{\kappa}_2 & = & -\kappa_1\sin\varphi + \kappa_2\cos\varphi, \\ \tilde{\tau} & = & \tau + \varphi'. \end{array}$$

Zadatak 2.

(a) Pretpostavite da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [1]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna*. [1]

(b) Neka $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [3]

(c) Pokažite da je površ $\Sigma_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ minimalna površ. [6]

(d) Nadjite konformalnu parametrizaciju za

$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Provjerite rezultat! [9]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b) Ovdje

$$E(u,v) = |(r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, h'(u))|^2 = r'^2(u) + h'^2(u)$$

$$F(u,v) = (r'(u)\cos v, r'(u)\sin v, h'(u)) \cdot (-r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0) = 0$$

$$G(u,v) = |(-r(u)\sin v, r(u)\cos v, 0)|^2 = r^2(u)$$

tako da je površ konformalna ako i samo ako $r'^2 + h'^2 = r^2$.

(c) Prvo moramo parametrizovati površ konfomalno. Parametrizirajući Σ_1 kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2+y^2} = r(u)$;
stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u)\sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u\cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ_1.
Tako imamo da je $E(u,v) = G(u,v) = \cosh^2 u$ i $F = 0$;
onda je $\mathbf{N}(u,v) = \frac{1}{r(u)}(-h'(u)\cos v, -h'(u)\sin v, r'(u)) = (-\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sinh u \sin v}{\cosh u}, \tanh u)$ i

$$e(u,v) = -(\sinh u\cos v, \sinh u \sin v, 1)\cdot(\frac{\sinh u\cos v}{\cosh^2 u}, \frac{\sinh u \sin v}{\cosh^2 u}, \frac{1}{\cosh^2 u}) = -1,$$

$$f(u,v) = -(\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, 1)\cdot(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, 0) = 0,$$

$$g(u,v) = -(-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0)\cdot(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, 0) = 1,$$

tako da imamo $H(u,v) = \frac{\cosh^2 u\cdot 1 - 2\cdot 0 + \cosh^2 u(-1)}{2\cosh^4 u} = 0$.

(d) Parametrišemo Σ_2 (što je jednična sfera probijena na svojim sjevernim i južnim polovima) kao površ revolucije:

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$$

sa funkcijama $u \mapsto r(u) \in (0,\infty)$ i $u \mapsto h(u) \in \mathbb{R}$. Koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = r'^2 + h'^2, \quad F = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = r^2.$$

Stoga konformalnost čita

$$r^2 = r'^2 + h'^2;$$

zajedno sa jedačinom sfere, $r^2 + h^2 = 1$ izvedemo diferencijalnu jednačinu za h:

$$1 - h^2 = \frac{h^2 h'^2}{1-h^2} + h'^2 \quad \Leftrightarrow \quad h'^2 = (1-h^2)^2;$$

rješenje ove (Riccatijeve) jednačine je $h(u) = \tanh u$. Sa ovim dobijemo $r(u) = \sqrt{1-h^2(u)} = \frac{1}{\cosh u}$ i stoga

$$\mathbf{x}(u,v) = (\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

Kako bismo završili, provjerimo značajke:

$$(\frac{\cos v}{\cosh u})^2 + (\frac{\sin v}{\cosh u})^2 + (\tanh u)^2 = 1 \quad \text{i} \quad (\tanh u)^2 < 1,$$

u stvari, $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$ tako da $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \Sigma_2$ pokriva Σ_2 u potpunosti; i konformalnost:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= \frac{1}{\cosh u}(-\tanh u\cos v, -\tanh u\sin v, \frac{1}{\cosh u}) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= \frac{1}{\cosh u}(-\sin v, \cos v, 0) \end{aligned}$$

tako da

$$E(u,v) = \frac{1}{\cosh^2 u} = G(u,v) \quad \text{i} \quad F(u,v) = 0.$$

Zadatak 3.

(a) Navedite i *dokažite Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. Navedite sve pomoćne rezultate koje budete koristili. [2+4]

(b) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalno vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u,v) u pravcu (λ,μ) ovog vektorskog polja. [3]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [2]

(c) Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gauss -ovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka generalnosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ. Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,(du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.) [9]

Rješenje.

(a) Rodriguesova jednačina: $d_{(u,v)}\mathbf{x}(\lambda,\mu)$ je pravac krivine ako i samo ako

$$\exists\kappa \in \mathbb{R} : (d_{(u,v)}\mathbf{N} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = 0;$$

κ je onda odgovarajuća principalna krivina. Ekvivalentno: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

Dokaz. Po lemi iz predavanja koja tvrdi da $d_{(u,v)}\mathbf{N} = -d_{(u,v)}\mathbf{x} \circ \mathrm{S}|_{(u,v)}$. ili, ekvivalentno, $\mathrm{S}|_{(u,v)} = -(d_{(u,v)}\mathbf{x})^{-1} \circ d_{(u,v)}\mathbf{N}$, imamo

$$(d_{(u,v)}\mathbf{N} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = d_{(u,v)}\mathbf{x}\,(\kappa\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} - \mathrm{S}|_{(u,v)}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix})$$

tako da $(d_{(u,v)}\mathbf{N} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = 0$ ako i samo ako $\kappa\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \mathrm{S}|_{(u,v)}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$ jer $d_{(u,v)}\mathbf{x}$ injektira.

(b) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalni vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$; njegov kovarijantni izvod u (u,v) u pravcu (λ,μ) je

$$(\nabla_{(\lambda,\mu)}\xi)|_{(u,v)} := \{(\lambda\xi_u + \mu\xi_v) - ((\lambda\xi_u + \mu\xi_v)\cdot\mathbf{N})\,\mathbf{N}\}(u,v).$$

∇ se takodjer zove Levi-Civita konekcija. Koeficijenti Γ^k_{ij} u

$$\nabla_j(\partial_i\mathbf{x}) := \partial_j\partial_i\mathbf{x} - (\partial_j\partial_i\mathbf{x}\cdot\mathbf{N})\mathbf{N} = \textstyle\sum_k \Gamma^k_{ij}\,\partial_k\mathbf{x}$$

se zovu Christoffelovi simboli.

$$\begin{aligned}\nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_u &=: \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_u =: \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v;\\ \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_v &=: \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_v =: \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

(c) Iz Codazzijevih jednačina

$$E_v = -2E\frac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1-\kappa_2} = -2E\varphi_v\tan\varphi \quad \text{i} \quad G_u = 2G\frac{(\kappa_2)_u}{\kappa_1-\kappa_2} = 2G\varphi_u\cot\varphi$$

tako da

$$(\tfrac{E}{\cos^2\varphi})_v = \tfrac{1}{\cos^2\varphi}\{E_v + 2E\varphi_v \tan\varphi\} = 0, \quad \text{i} \quad (\tfrac{G}{\sin^2\varphi})_u = \tfrac{1}{\sin^2\varphi}\{G_u - 2G\varphi_u \cot\varphi\} = 0.$$

Kao posljedica ovoga, možemo riješiti diferencijalne jednačine

$$u' = \tfrac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}(u) \quad \text{and} \quad v' = \tfrac{\sin\varphi}{\sqrt{G}}(v)$$

sa dvije funkcije $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$ jedne promjenjljive kako bismo dobili, za $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathbf{x}(u(\tilde{u}), v(\tilde{v}))$:

$$\tilde{\mathrm{I}} = (Eu'^2)\,d\tilde{u}^2 + (Gv'^2)\,d\tilde{v}^2 = \cos^2\varphi\,d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\,d\tilde{v}^2$$

i

$$\tilde{\mathrm{II}} = \kappa_1\cos^2\varphi\,d\tilde{u}^2 + \kappa_2\sin^2\varphi\,d\tilde{v}^2 = \sin\varphi\cos\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\}.$$

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 26/09/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Definišite *jedinično tangentno vektorsko polje* T i *krivinu* κ. [2]

(b) Pokažite da je krivina identično jednaka nuli ako i samo ako slika krive γ leži na pravoj. [5]

(c) Definišite *principalno normalno vektorsko polje* N, *binormalu* B i *torziju* τ. Navedite i dokažite *Frenet-Serret formule* za γ. [5]

(d) Pokažite da je odnos τ/κ konstantan ako i samo ako postoji konstantni jedinični vektor u koji čini konstantan ugao θ sa tangentnim vektorskim poljem T, tj. $T \cdot u = \cos\theta$. Kako se u ovom slučaju zove kriva γ? [8]

Rješenje.

(a) Ako je $\gamma \mapsto \gamma(s)$ parametrizovana dužinom luka, onda

- $T(s) := \gamma'(s)$ definiše jedinično tangentno vektorsko polje i
- $0 = 1' = (T \cdot T)'(s) = T(s) \cdot T'(s)$ tako da $T'(s) \parallel N(s)$ i N može biti definisano normalizacijom T' sve dok T' nije nestalo.

Onda se $K(s) := T'(s)$ zove vektorsko polje krivine krive γ i

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s) = K(s) \cdot N(s)$$

se zove njenom krivinom.

(b) Ako je $\gamma(s) = p + qs$, $p, q \in R^3$, $|q| = 1$, onda je $T(s) = q$ konstantno i $T'(s) = 0$, pa je stoga $\kappa(s) = 0$.

Obratno, ako je $\kappa(s) = 0$, onda je T konstatno, $T(s) = q$ recimo. Integrirajući $\gamma'(s) = q$, dobivamo $\gamma(s) = p + qs$, gdje je $p = \gamma(0)$.

(c) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}.$$

Vektorsko polje $B := T \times N$ zovemo binormalno (vektorsko polje) krive. Torzija je

$$\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s)).$$

Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Krivu $t \mapsto \gamma(t)$ zovemo <u>(opšti) heliks</u> ako njene tangente čine konstantan ugao sa fiksnim pravcem $a \in \mathbb{R}^3$ u prostoru, tj., $a \cdot T \equiv const.$

Pretpostavimo da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovan (opšti) heliks. Onda

$$0 = (a \cdot T)' = \kappa\, a \cdot N,$$

to jest, ako $\kappa \neq 0$, onda je a paralelno sa rektifirajućom ravni,

$$a = \lambda T + \mu B$$

sa pogodnim funkcijama λ i μ. Diferencirajući nalazimo da

$$0 = a' = \lambda' T + (\lambda\kappa - \mu\tau)\, N + \mu' B,$$

to jest, λ i μ su konstantne i odnos $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ je konstantan.

Obratno, ako $\frac{\tau}{\kappa} \equiv const$ za krivu $s \mapsto \gamma(s)$ biramo $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da

$$0 = \kappa \cos\alpha - \tau \sin\alpha$$

kako bismo dobili

$$(\cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B)' = (\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\, N \equiv 0.$$

To jest, $a := \cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B$ je konstantan pravac koji čini konstantan ugao α sa T jer je $a \cdot T \equiv \cos\alpha$.

Zadatak 2.

(a) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = \left(\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right).$$

(i) Nadjite krivinu i torziju krive α. [8]

(ii) Neka je $t \mapsto \beta(t)$ druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva α. Kakav je odnos izmedju α i β? [2]

(b) Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t. [5]

(c) Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive. [5]

Rješenje.

(a)

(i) Prvo parametrišimo α dužinom luka.

$$\alpha'(t) = ((1 + \cos t)/2, (-1 + \cos t)/2, -\sin t/\sqrt{2}),$$

pa je $|\alpha'| = 1$, pa je kriva već parametrisana dužinom luka. Imamo da je

$$\alpha''(t) = (-\sin t/2, -\sin t/2, -\cos t/\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\kappa = |\alpha''| = 1/\sqrt{2}.$$

Imamo da su

$$T = \left(\frac{1 + \cos t}{2}, \frac{-1 + \cos t}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$N = (\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, -\cos t),$$

$$B = T \times N = (\frac{\cos t - 1}{2}, \frac{\cos t + 1}{2}, \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}).$$

Stoga je

$$\tau = -B' \cdot N = \big(\sin t/2, \sin t/2, \cos t/\sqrt{2}\big) = -1/\sqrt{2}.$$

(ii) Po Fundamentalnoj teoremi za prostorne krive, β je jednaka α do rigidnog kretanja.

(b) Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t. Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!); Onda se tvrdnja može dokazati direktnom integracijom. Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$. Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \quad \text{i} \quad g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

(c) Neka je $\gamma(t) := e^t(\cos t, \sin t)$; Onda $|\gamma'(t)|^2 = 2e^{2t}$ i ako izračunamo dužinu luka od $t = 0$,

$$s(t) = \textstyle\int_0^t |\gamma'(t)|\, dt = \sqrt{2}(e^t - 1) \quad \Leftrightarrow \quad t(s) = \ln(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}).$$

Stoga je

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s)) = (1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}})\,(\cos \ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}), \sin \ln(1 + \tfrac{s}{\sqrt{2}}))$$

reparametrizacija dužinom luka krive γ.

Sada, njena krivina je, do znaka, data sa

$$\kappa^2(s) = |\tilde{T}'(s)|^2 = |\tilde{\gamma}''(s)|^2 = \tfrac{1}{(\sqrt{2}+s)^2} = \tfrac{1}{2e^{2t}}.$$

Zadatak 3.

(a) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [4]

(b) Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. [10]

(c) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate. [6]

Rješenje.

(a) Površ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se zove linijska površ ako prima (lokalno) parametrizaciju $\mathbf{x}$ forme

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v\,\eta(u),$$

gdje je $u \mapsto \gamma(u)$ regularlna kriva u $\mathbb{R}^3$ i $u \mapsto \eta(u) \in S^2$ jedinično vektorsko polje duž γ.

Razvojna površ je linijska površ $(u, v) \mapsto \gamma(u) + v\,\eta(u)$ čije je Gaussovo preslikavanje $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{N}(u)$ jedino zavisno o u, tj.,

$$\mathbf{N}_v \equiv 0.$$

(b) Prateći primjer iz sekcije 2.4, linija $y = 1$, $z = x$ leži na Σ: parametrišemo liniju pomoću $v \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}}v, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}v)$; kako bismo vidjeli da je jednačina koja definiše Σ zadovoljena,

$$\frac{1}{2}v^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}v^2.$$

Takodje, znamo da je površ površ revolucije (jer je 0-ti nivo funkcije $F(x, y, z) = (x^2+y^2)-z^2$, čija je zavisnost o x i y jedino u obliku x^2+y^2, tj., udaljenost tačke od z-ose) oko z-ose. Odavdje dobivamo parametrizaciju površi rotirajući gornju liniju oko z-ose:

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je Σ linijska površ sa $\gamma(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, 1)$.

(c) Cilindar

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x(u), y(u), v) = \overbrace{(x(u), y(u), 0)}^{=:\gamma(u)} + v\, \overbrace{(0, 0, 1)}^{=:\eta(u)}$$

je onda (očito) linijska površ i ima Gaussovo preslikavanje

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(u)+y'^2(u)}}(y'(u), -x'(u), 0),$$

koje ne zavisi o linijskom parametru v.